FOR THE PEOPLE
FOR EDVCATION
FOR SCIENCE

LIBRARY
OF
THE AMERICAN MUSEUM
OF
NATURAL HISTORY

Bound at
A.M.N.H.
1916

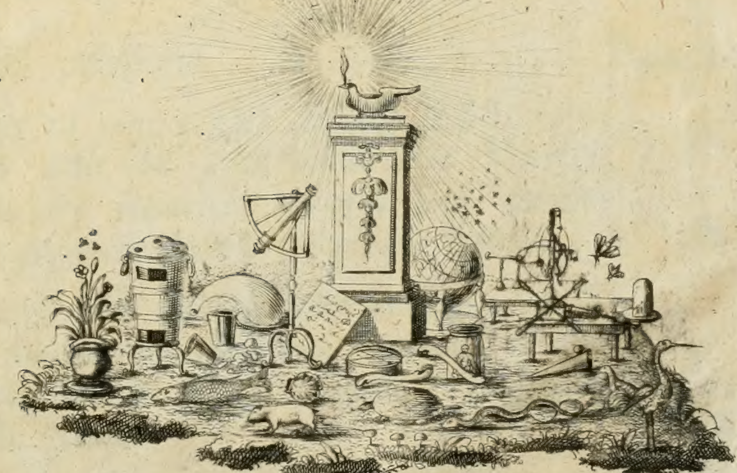
LIBRARY OF THE AMERICAN MUSEUM OF NATURAL HISTORY

ACTA
ACADEMIAE SCIENTIARVM IMPERIALIS PETROPOLITANAE

5.06.(47.4)

pro Anno MDCCLXXIX

PARS POSTERIOR.



PETROPOLI
TYPIS ACADEMIAE SCIENTIARVM
MDCCLXXXIII.

4/22/1916

16. 70288 April 28

TABLE.

HISTOIRE DE L'ACADÉMIE IMPÉRIALE DES SCIENCES.

MDCCLXXIX. Juillet —— Décembre.

ASSEMBLÉE publique - - - Page 3.

Sur les moyens de rendre plus durable le bois qu'on emploie pour la conſtruction des Navires: extrait des mémoires envoyés pour concourir au Prix dé 1779. *Par M.* Pallas - 7.

EXPE'RIENCE *faite publiquement avec une maiſonette de bois incombuſtible, conſtruite d'après la Méthode de Milord* Mahon. *Rapportée par M.* Krafft - - - - - 9.

Page.

QUESTION DE BOTANIQUE *propoſée pour ſujet du Prix de l'année* 1782 - - 11.

ME'TE'OROLOGIE.

E'TE' *de* 1779. - - - - - - 14.

RECEPTIONS ET PROMOTIONS - - 18.

OUVRAGES, *Machines & Inventions préſentées ou communiquées à l'Académie pendant le cours du dernier ſémeſtre de l'Année* 1779. - 20.

ACTA ACADEMIAE SCIENTIARVM IMPERIALIS PETROPOLITANAE

pro Anno MDCCLXXIX. Pars poſterior

cum tabulis XVIII. aeri inciſis.

MATHEMATICA Pag.

M. le Marquis de CONDORCET. *Sur les fonctions indéfinies* - - - - - - - 3.

LEONH. EVLER. *De ſerie Lambertina, plurimisque eius inſignibus proprietatibus* - - 29.

A. I. LEXELL. *Continuatio Diſſertationis de Methodis integrandi aequationes differentiales lineares in Tomo Actorum I.* - - - 52.

NI-

Pag.

NICOLAVS FVSS. *Recherches ſur un Problème du Calcul des Probabilités.* - - - 81.

PHYSICO-MATHEMATICA

LEONH. EVLER. *De motu oſcillatorio pendulorum ex filo tenſo dependentium* - - 95.

—— —— *Dilucidationes ſuper aliquot caſus aequilibrii difficiliores* - - - - - 106.

—— —— *Determinatio omnium motuum quos chorda tenſa et vniformiter craſſa recipere poteſt* - - - - - - - 116.

—— —— *De proprietatibus triangulorum mechanicis* - - - - - - 126.

ANTONIVS-MARIA LORGNA. *De curuarum in concamerationibus impulſu, noua Theoria* 156.

LEONH. EVLER. *De figura curuae elaſticae contra obiectiones quasdam Ill.* D'Alembert 188.

PHYSICA

W. SVIEF. *Blenniorum duae ſpecies ex Muſaeo Academico deſcriptae* - - - 195.

C. F. WOLFF. *De finibus partium corporis humani generatim; ſpeciatim de vſu plicarum,*

Pag.

quae in veſiculis felleis nonnullorum corporum inueniuntur - - - - 202.

P. S. PALLAS. *Deſcriptiones plantarum Sibiriae peculiarium* - - - - 247.

—— —— *Capra caucaſica e ſchedis Cel.* A. I. Güldenſtädt - - - - - 273.

I. G. GEORGI. *Scrutamen chemicum lichenum paraſiticorum* - - - - 282.

ASTRONOMICA

LEONH. EVLER. *Cautiones neceſſariae in determinatione motus planetarum obſeruandae* - 295.

A. I. LEXELL. *De elementis orbitae Cometae A.* 1773 *obſeruati, vbi praeprimis disquiritur vtrum huius cometae tempus periodicum aſſignare liceat?* - - - - 335.

—— —— *De perturbatione in motu telluris ab actione Veneris oriunda* - - - - 359.

P. INOHODSOF. *Breuis expoſitio obſeruationum aſtronomicarum pro determinando ſitu geographico vrbis* Neſchin *inſtitutarum* - - 393.

J. A. EVLER. *Epitome obſeruationum meteorologicarum Petropoli A.* 1779 *ſecundum Calendarium Gregorianum inſtitutarum* - - 400.

HISTOI-

HISTOIRE
DE
L'ACADÉMIE IMPÉRIALE
DES
SCIENCES.

HISTOIRE
DE L'ACADÉMIE.

MDCCLXXIX.
Juillet —— Décembre.

ASSEMBLÉE PUBLIQUE.

L'Aſſemblée publique deſtinée à décerner le Prix annuel, s'eſt tenue le Samedi 12 Octobre, à onze heures avant midi. Elle a été honorée de la préſence de pluſieurs perſonnes de diſtinction, des Miniſtres des Cours étrangeres & des Honoraires.

Le Secrétaire de Conférences *Jean Albert Euler* ouvrit la ſéance par un expoſé des publications & lectures qui alloient entretenir cette Aſſemblée ſolemnelle.

S. E. Monſieur *de Domaſchnef*, Directeur de l'Académie rapporta enſuite que le Prix économique qui devoit être adjugé cette année, & qui concernoit la queſtion ſur la conſervation des bois de conſtruction pour les navires, avoit été adjugé à un mémoire allemand ayant pour Deviſe: *Multum adhuc reſtat operis, multumque reſtabit, nec vlli nato poſt mille ſecula praecludetur occaſio aliquid adhuc adjiciendi.* SENECA. Le billet cacheté ayant été ouvert, on y a trouvé le nom de M. *Gottfried Ludolph Graſſmann*, Paſteur de Sinzlow & Kortenhagen en Poméranie dans le baillage royal Pruſſien de Colbatz. *L'Acceſſit* a été accordé au mémoire allemand déſigné par la deviſe: *Omnia et vno, omnia ad vnius gloriam*: & comme celui-ci contient un procédé ſimple & très conforme aux principes de la Chymie, pour rendre les bois de conſtruction moins ſujets à la corruption, l'Académie lui a décerné en outre la Médaille Académique en Argent: le billet cacheté dévant donc être ouvert, on a reconnu que l'Auteur en eſt M. *Alberti*, Docteur en Médecine & Phyſicien du cercle & de la ville de Conitz dans la Pruſſe occidentale.

M. le Prof. *Pallas* lut un extrait du mémoire couronné, ſuivi du ſommaire de l'Acceſſit & des autres écrits envoyés au concours.

Le Directeur annonça avec regret la perte que l'Académie a faite pendant le cours de l'année par la mort de deux de ſes membres, Meſſieurs, le Conſeiller privé & Sénateur *Grégoire de Téplof* Honoraire & le

Prof.

Prof. *Jean Burmann* Externe. (*) Il proclama enſuite à la place du premier, M. le Baron *George d'Aſch*, Conſeiller d'Etat au Collège Impérial de Médecine. Le nouveau membre Honoraire lut un discours de réception & le Directeur y répondit.

Le Secrétaire paſſa à la nomination de trois Adjoints, élèves de l'Académie, qui après avoir achevé leurs études aux Univerſités des païs étrangers, avoient remporté les ſuffrages des Académiciens par des preuves non équivoques qu'ils avoient données de leurs talens & de leur capacité.

Ces récipiendaires avoient apporté chacun un mémoire pour être lu à l'Aſſemblée, ſavoir M. le D. *Ozeretskowsky* ſur l'inoculation des arbres, M. *Moiſeenkof* ſur les moyens les plus ſûrs de découvrir & d'exploiter les mines, & M. *Zouyef* ſur les cauſes du paſſage des animaux d'un païs à l'autre; mais craignant d'abuſer de la complaiſance de l'illuſtre Auditoire, ils ſe contenterent de prononcer chacun un petit discours de remerciment, auquel le Directeur répondit en les encourageant à pourſuivre leur carriere avec honneur & zèle.

Le Directeur publia enſuite la réception de cinq nouveaux correſpondans que l'Académie a élus dans le cours de l'année.

(*) Hiſtoire de l'Académie des Sciences, Année 17 9, premier Sémeſtre, pag. 77.

M. le Prof. *Krafft* lut une rélation du ſuccès qu'a eu l'expérience, faite publiquement le Lundi 7 de Décembre ſur l'incombuſtibilité d'une maiſon de bois conſtruite ſelon la méthode du Lord *Mahon*, qui a réſiſté pendant plus d'une heure à un feu de flammes des plus violens, ſans en avoir été conſumée.

M. l'Adjoint *Fuſs* devoit encore lire un mémoire fort curieux ſur une nouvelle eſpèce de poèle ſans tuyau de cheminée & très favorable à l'épargne du bois, parce que la fumée ne ſe perd pas en l'air & ſe conſume elle même par un mouvement de circulation: mais vu le temps que cette lecture auroit exigé, elle fut renvoyée à une autre ſéance.

Le Directeur lut le contenu de la queſtion de Botanique, que l'Académie propoſe pour le Prix de l'année 1782 & le Secrétaire en fit diſtribuer les programmes imprimés. Enfin

Le Directeur termina la Séance par l'acte de bruler dans un Réchaut les billets cachetés des autres mémoires qui avoient été adreſſés à l'Académie pour concourir au Prix décerné en cette Aſſemblée.

Sur

Sur les moyens de rendre plus durable le bois qu'on emploie pour la conſtruction des Navires: extrait des Mémoires envoyés pour concourir au Prix de 1779.

par M. Pallas.

Parmi le nombre des écrits que l'Académie a reçus pour concourir au Prix propoſé ſur le meilleur moyen de rendre le bois de conſtruction plus durable, la pluspart ſe bornent à conſeiller la macération de ce bois dans différentes eaux ſtyptiques ou ſalines. Entr'autres on a préſcrit de fortes infuſions de tan renouvellées à pluſieurs repriſes, des ſolutions de Vitriol de Mars & de Zinc, l'eau mère qui reſte après la cuite du Sel, & enfin la ſaumure préparée avec du ſel de rebut. Tous ces moyens ainſi que pluſieurs autres étant aſſés connus & leur application trop bornée ou impraticable pour les grandes pièces de conſtruction, l'Académie a cru ne pouvoir donner ſon approbation qu'à deux mémoires, qu'elle croit contenir des avis utiles & praticables.

L'une de ces pièces que l'Académie juge digne du Prix propoſé, donne des reflexions fort ſages ſur le traite-

traitement des bois de conſtruction en général, & propoſe, comme un moyen infaillible de rendre le bois plus ſolide & plus durable, la méthode ſuivante.

On place le bois verd & dégroſſi, qu'on aura ſoin de couper ſurtout au printems, ſur une pente bien expoſée au ſoleil: ou l'on formera dans la forèt même un pavé avec du moëlon ou des pierres, recouvert de quelques pouces de ſable ſec, & après avoir rempli les intervalles des pieces de bois de ce même ſable, qui doit les couvrir à la hauteur de pluſieurs pouces, on doit les laiſſer dans ce bain jusqu'au deſſèchement parfait.

L'Auteur qui aſſure avoir pratiqué cette méthode en grand, annonce, que par ce procédé le bois ſe deſſèchera en très peu de temps, & ſans aucune gerçure à l'extérieur; qu'il deviendra plus compacte, & que tout ſon aubier ſera changé en bois, comme il arrive aux arbres qu'on écorce ſur pied. Il ajoute qu'on pourra ſans nuire à la qualité du bois, augmenter la chaleur de ces bains de ſable par des feux entretenus dans des excavations ou voutes pratiquées au deſſous du pavé, & deſſècher par ce moyen, pour les beſoins preſſans, les plus groſſes pièces en très peu de temps.

L'autre écrit, que l'Académie ne met qu'au ſecond rang, indique une eſpèce de minéraliſation du bois, par un procédé ſimple & très conforme aux principes de la chymie, qui conſiſte à faire macérer ce bois dans une ſolution de Vitriol de Mars, qui pourra ſervir à cet emploi jusqu'à conſomption, & de transférer enſuite ce

bois

bois pénétré du Vitriol, dans des bacs remplis d'eau de chaux, laquelle en abſorbant l'acide vitriolique ne pourra que précipiter dans le tiſſu du bois même, les particules ferrugineuſes, que le Vitriol y aura introduites.

Expérience

faite publiquement avec une maiſonette de bois incombuſtible conſtruite d'après la Méthode de Milord *Mahon*: rapportée par M. *Krafft*.

L'Académie Impériale des Sciences, enviſageant combien il ſeroit avantageux & important à la Patrie, d'y répandre la connoiſſance & la Pratique de la nouvelle méthode de garantir toutes ſortes d'édifices des ravages du feu, inventée par deux Illuſtres Anglois M. *Hartley*, & Milord *Mahon*, avoit réſolu d'en donner au Public une preuve auſſi ſolemnelle que rigoureuſe.

Je fus à cet éffet chargé de faire conſtruire une telle maiſonette de bois ſuivant le coutume du païs, de douze pieds de longueur ſur autant de largeur. Je ſuivis exactement la méthode de Milord *Mahon* & j'eus ſoin durant la bâtiſſe de faire remarquer aux ouvriers auſſi bien qu'aux curieux qui s'y trouvoient, jusqu'à la moindre circonſtance du procédé, en leur dévéloppant le principe ſur lequel il eſt fondé. Il ſeroit ſuperflu d'entrer ici dans les détails de cette maniere de bâtir en bois, dont l'excellence a été parfaitement conſtatée dévant une

Aſſemblée Illuſtre & nombreuſe, par l'épreuve publique qu'on a faite le 7 de ce mois (*d'Octobre*) en mettant à cette maiſonette un feu des plus violens, tout à la fois ſur le toit, dans l'intérieur & à l'entour, à la force duquel, malgré le vent qui s'y joignit encore, elle a cependant parfaitement bien réſiſté: enſorte qu'après que le feu ſe fut éteint de lui même, ayant duré plus d'une heure, les planches ne furent trouvées que charbonnées à leur ſurface extérieure, & les poutres nullement endommagées.

Tout ce que j'ai encore à ajouter à ce rapport, c'eſt le réſultat d'un cacul préliminaire de la dépenſe, que pourroit cauſer cette nouvelle manière de bâtir, & dont je crois pouvoir fixer l'excédent à 30 pour cent, dépenſe qui ne ſauroit être miſe en parallèle avec l'avantage immenſe qu'ont de pareilles maiſons, de réſiſter avec tant de force aux progrès du feu & à la communication des incendies, ſans faire mention de ce qu'elles feront beaucoup plus à l'abri du froid, de l'humidité & de la corruption, que les maiſons conſtruites de la maniere ordinaire.

QUE-

QUESTION DE BOTANIQUE

propoſée pour ſujet du Prix de l'Année 1782.

Sententiae Phyſiologorum de plantarum cryptogamiarum Linnaei, ſeu filicum, muſcorum, algarum, fungorumque propagatione hucuſque valdopere diviſae ſunt. Alii non niſi per gemmas plurimas harum plantarum perennare et ſeminibus plane carere perhibent; alii ſemina vera in his adeſſe et plantas matri ſimiles exinde provenire contendunt, qui iterum quoad ſeminum fructificationem inter ſe differunt. Alii hanc per tunicam communem vaſculoſam, ſemina cryptogamiarum obuoluentem et in ſuperficie interna auram ſeminalem exhalantem, in filicibus et muſcis praeſertim, peragi; alii eandem per organa maſculina, illis plantarum perfectarum ſimillima, auram ſeminalem explodentia, in muſcis et fungis praeſertim, abſolui afferunt. Minime pariter de partium temporariarum denominatione, muſcorum imprimis, Botanici conſentiunt; alii ſubſtantiam eandem pro polline antherarum habent, quam alii ſemina eſſe dicunt; atque partem eandem alii antheram, alii ſeminum capſulam appellant. Alii tandem illam muſcorum particulam, quam vulgo calyptram nominant, pro tunica vaſculoſa fecundante, anthera-

therarum vices ſuſtinente, alii pro tunica inerti, calycis loco inſeruiente, declarant; iidem modo plane analogo de volua fungorum diſſentiunt.

Ad lites has litterarias componendas Academia Scientiarum Imperialis Petropolitana Viros omnium gentium doctos inuitat, vt vnam alteramue harum opinionum reiteratis obſervationibus et multiplicatis experimentis tandem confirmare, vel aliam, ſi probabiliorem inuenerint, proponere velint, verbo:

Theoriam generationis et fructificationis plantarum cryptogamiarum Linnaei dare, et obſeruationibus ad varias, ſi non omnium attamen plurium Linnaeanorum generum cryptogamiorum ſpecies inſtitutis, adiunctisque omnium partium fructificationis diſtinctis et iconibus illuſtratis deſcriptionibus corroborare, tandemque demonſtrare, an modus fructificationis et propagationis omnibus claſſe cryptogamiarum hucusque comprehenſis plantis idem ſit, an differat pro ordinum ſupra enumeratorum differentia. Vt praeterea figurae plantarum cryptogamiarum ad examen reuocatarum vel ex libris Botanicorum alligentur, vel auctorum cura confectae diſſertationibus addantur, maximopere euidentiae cauſa optatur.

Solutiones thematis nunc propoſiti Academia Scientiarum Imperialis Petropolitana ante diem 1 Ianuarii anni MDCCLXXXII exſpectat, quarum ea, quam iudicium Sociorum Academiae Petropoli habitantium, (quibus nunquam palma Academiae concurrit), ceteris praeſtantiorem et

et adaequatiorem declarabit, praemio centum nummorum aureorum, quos vulgo Ducatos appellant, condecorabitur.

Diſſertationes diſtictis litteris vel roſſico, vel latino, vel germanico, vel gallico idiomate conſcribendae; non nominibus auctorum, ſed ſymbolo diſtinguendae; ſchedula obſignata, externe ſymbolum idem diſſertationi inſcriptum, interne autem auctoris nomen continente augendae; atque ante terminum deſignatum ad Academiae Imperialis Scientiarum Secretarium transmittendae ſunt, quo facto ab eodem ſyngrapham cum numeri, ſub quo diſſertatio fuerit repoſita, ſignificatione accipiet auctor quilibet, dummodo locum, ad quem ea dirigenda ſit, indicauerit. Diſſertationes termino elapſo advenientes praemium obtinere nequeunt.

Iudicium Academiae in primo poſt terminum praefixum conuentu publico anno MDCCLXXXII enunciabitur.

ÉTÉ de 1779.

Suivant le nouveau Stile.

1.

Il neigea pour la dernière fois le 24 Avril: il recommença à neiger le 31 Octobre. L'intervalle entre ces deux termes eſt de 190 jours.

2. Il géla pour la dernière fois le 19 Avril, Therm. de Delisle 154^d. Il recommença à geler le 13 Octobre, Therm. 154^d. Cet intervalle eſt de 177 jours.

3. La rivière débacla le 11 Avril par une température de 148^d, les glaces du Ladoga ne parurent pas. La Néva reſta libre & navigable pendant 232 jours. Le 30 Novembre les glaces ſe formèrent & reparurent en grande quantité; le Thermomètre étoit à 176 degrés, & le vent ſouffloit avec véhémence de l'Eſt. Enfin dans la nuit du 1. Décembre au 2. la rivière fut priſe par un froid de 170 degrés.

4. La plus grande chaleur a été de 110 degrés le 12 Août à 2 heures après midi, Baromètre 27, 89, c'eſt à dire 27$\frac{89}{100}$ pouces de Paris; ciel ſerein, vent de l'Eſt.

5. La

5. La chaleur moyenne à midi a été trouvée
depuis le 1 Mai jusqu'au 1 Novembre 126 degrés
depuis le 1 Juin jusqu'au 1 Octobre 122 ——
La chaleur moyenne au matin & au ſoir
depuis le 1 Mai jusqu'au 1 Novembre 134 degrés
depuis le 1 Juin jusqu'au 1 Octobre 131 ——

6. La chaleur à midi a été depuis le 1 Mai jusqu'au 1 Novembre, ce qui comprend un intervalle de 184 jours.

1 jour de 110 le 12 Août
55 jours entre 120 & 110 en Mai —— Septembre (*)
68 jours entre 130 & 120 en Mai —— Octobre.
50 jours entre 140 & 130 en Mai, Juin, Août — Oct.
10 jours entre 150 & 140 en Juin & Octobre.

7. La chaleur au matin & au Soir a été pendant ce même intervalle de ſix mois d'été.

6 jours moindre que 150 le 13 — 18 Octobre.
40 jours entre 140 & 150 en Mai, Juin, Septembre & Octobre.
74 jours entre 130 & 140 en Mai —— Octobre.
64 jours entre 120 & 130 en Mai —— Septembre. (**)

8. L'état du Baromètre depuis le 1. Mai jusqu'au 1. Novembre:

La

(*) Le 27. 28 Mai, le 10. 11. 13. 14. 15. 17 19. 20. 21. 23 — 26. 30 Juin, le 6. 11. 18 —— 31 Juillet, le 1 —— 12. 16 ——. 21. 23. 24. 25 Août & le 4. 6. 7 Septembre.

(**) Le 27. 28 Mai, le 10 —— 17. 19 —— 23. 25 —— 27. 29, 30 Juin, le 4. 5. 7. 8. 10 —— 12. 18 —— 31 Juillet, le 1 —— 13. 19. 20. 22. 24 Août, le 2 —— 7 Septembre.

La plus grande élévation 28. 42 le 15 Octobre à 10 heures avant midi. Therm. 153, ciel nubileux, brouillard & calme.

La plus petite élévation 26. 88 le 30 Octobre à 6 heures du matin. Therm. 142, ciel couvert, beaucoup de pluie & vent de Sud.

La variation totale - 1. 54

Le milieu - - 27. 65

La hauteur moyenne 27. 88 c. à. d. $27\frac{88}{100}$ pouces de Paris.

Le Baromètre s'eſt trouvé 87 jours au deſſus de $27\frac{9}{10}$; 63 jours au deſſus de 28 & 38 jours au deſſus de $28\frac{1}{10}$ pouces de Paris.

9. Les vents forts, toujours pendant ce même intervalle de 6 mois ou 184 jours d'été ſoufflèrent

1 jour du *Nord* le 30 Mai,

7 jours du N-E. le 1-4. 24 Juin, le 13. 14 Août.

5 jours de *l'Eſt* le 15. 31 Mai, 18 Juin, 17 Juillet, 11 Octobre.

4 jours du S-E. le 11 Mai, 19 Juin, 17. 18 Sept.

4 jours du *Sud* le 11. 20 Juin, 10 Sept. 21 Octobre.

5 jours du S-Ou. le 18 Mai, 21 Juin, 20 Septemb. 22. 28 Octobre.

16 jours de *l'Oueſt* le 22 Mai, 10. 22 Juin, 1. 2. 10. 11. 30 Juillet, 20. 24. 25 Août, 3. 7. 25 Sept. 19. 20 Octobre.

5 jours du N-Ou. le 17. 21 Mai, 27 Juin, 26. 27 Août.

10.

10. Les vents très forts régnèrent
1 jour du N-E. le 29 Mai.
1 jour de *l'Eſt* le 20 Juillet.
4 jours du *Sud* le 2. 12 Mai, le 30 Juin, 19 Sept.
2 jours du *S-Ou*. le 6 Mai, 8 Septembre.
2 jours de *l'Oueſt* le 31 Juillet, 22 Août.

11. Les autres variations de l'Atmosphère depuis le 1 Mai jusqu'au 1 Novembre ſe trouvent marquées dans la table ſuivante.

Atmosphère.	Mai.	Juin.	Juill.	Août.	Sept.	Oct.	Somme.
Jours entièrement ſereins	5	14	11	17	9	10	66
Jours entièrement couverts	7	4	3	1	9	9	33
Brouillards	1	0	1	5	9	6	22
Pluie { médiocre	14	7	11	3	10	9	54
Pluie { copieuſe	7	1	5	3	4	4	24
Neige - - - -	0	0	0	0	0	1	1
Grèle - - - -	1	0	0	0	0	0	1
Orages - - - -	2	2	6	3	0	0	13
Aurores boréales - -	1	0	0	1	7	4	13

La quantité de l'eau de pluie tombée pendant cet intervalle de 6 Mois a été trouvée de 8 $\frac{89}{100}$ pouces de Paris.

RECEPTIONS ET PROMOTIONS.

Honoraire.

M. le Baron *Grégoire Aſch*, Conſeiller d'Etat au Collège Impérial de Médecine, Prémier Medecin des Armées Impériales & Membre de la Société Royale des Sciences de Göttingen.

Elû le 27 Septembre & proclamé à l'Aſſemblée publique du 12 Octobre.

Adjoints.

M. *Jean Gottlieb Stritter*, Aſſeſſeur de Collège, pour les Archives du Collège des Affaires Etrangères à Moscou.

Elû & nommé le 10 Octobre.

M. *Nicolas Ozeretskovski*, pour l'Hiſtoire naturelle.
M. *Waſile Zouyef*, pour la même partie.
M. *Féodor Moïſienkof*, pour la Minéralogie.
Nommés le 23 Septembre & proclamés à l'Aſſemblée publique du 12 Octobre.

Corres-

Correſpondans Régnicoles

Proclamés à l'Aſſemblée publique du 12 Octobre.

M. *Eugène-Melchior-Louis Patrin*, Avocat au Parlement de Paris; à Kolivan auprès de S. E. Monſieur le Major-Général *Boris de Möller*: Reçu le 10 Juin.

M. *Jean Henri Gottlieb Engel*, Aſſeſſeur de Collége, & Chirurgien Opérateur au Grand-Hôpital à Moscou: Reçu le 10 Juin.

M. *Alexandre Karamyſchef*, Conſeiller de Cour & Directeur de la Banque Impériale à Irkoutzk'.

Reçu le 21 Juin.

M. *Féodor Toumansky*, Aide-Enſeigne (Бунчуковые Товарищъ) à Glouchov.

Reçu le 21 Juin.

M. *Jean Rénovanz*, Surintendant des Forges (Ober-Hütten-Verwalter) à Barnaoul.

Reçu le 21 Juin.

OUVRAGES, MACHINES ET INVENTIONS

préſentées ou communiquées à l'Académie pendant le cours du dernier ſémeſtre de l'Année 1779.

Dans l'Aſſemblée du Vendredi 5 Juillet, le Secrétaire de Conférences a préſenté de la part de Mr. *Benjamin Wilſon.*

Reaſons for diſſenting from the Report of the Committe appointed to conſider of Mr. *Wilſon's* experiments etc. by *Samuel Musgrave*, read of the Royal Society, June 25. 1778.

avec une lettre du même à M. *Euler* le père datée de Londres le 25 Mai, contenant des réflexions & obſervations ſur les remarques que le dernier a fait inſérer dans l'Hiſtoire de l'Académie à l'occaſion des nouvelles expériences optiques faites avec des corps phoſphoriques (*).

Le 8 Juillet. Le Secrétaire a préſenté une quadrature de cercle adreſſée à l'Académie par *Philippe Jämmerlich*, avec une lettre datée de Schuyen le 10 Juin.

Le

(*) Acta Acad. Imper. Sc. Année 1777. 1 Sémeſtre; Partie hiſtorique p. 71.

Le 12 Août. Le Secrétaire a remis les Diſſertations que les Élèves de l'Académie, Mrs. le *D. Nicolas Ozeretskovsky*, *Foedor Moïſienkof* & *Waſile Zouvef*, avoient compoſées ſur des ſujets propoſés par la Conférence, pour être ſoumiſes au jugement de Mrs. les Académiciens.

le 1er. De plantis paraſiticis:

le 2^{d}. Exemplum metamorphoſis minerarum in mineris argenti:

le 3e. Idea metamorphoſeos inſectorum ad caetera animalia applicatae.

—— —— Encore de la part de M. *Moïſienkof*, un ouvrage imprimé à Leipzig.

Mineralogiſche Abhandlung von dem Zinnſtein.

—— —— De la part de M. le Marquis de *Montalembert* avec une lettre adreſſée au Directeur de Paris le 20 Mai.

La Fortification perpendiculaire, ou Eſſai ſur plufieurs manières de fortifier la ligne droite, le Triangle, le Quarré & tous les Polygones en donnant à leur défenſe une Direction perpendiculaire.

—— —— De la part de l'Univerſité Impériale de Moscou.

Рѣчь говоренная въ публичному Собраніи Іюня 30 дня и. п.

Le Triomphe de l'éloquence dans la faculté des Arts: Discours prononcé par M. *Baudovin* à l'Occaſion de l'Anniverſaire de l'Avènement au Throne.

—— —— M. le Prof. *Lexell*, a remis de la part de M. *Meſſier* Aſtronome de la Marine à Paris un mémoire imprimé

primé contenant les obſervations de la onzième Comète qu'il a découverte & obſervée depuis le 14 Juin jusqu'au 3 Octobre 1770.

Le 19 Août. Le Secrétaire a lu une lettre de M. le Prof. *Hennert* à Utrecht, qui envoie pour être préſenté à l'Académie

Expoſé des Avantages du Cabeſtan de l'invention de M. *A. G. Ekhardt.*

—— —— une lettre de M. l'Abbé *Sans* adreſſée à Mrs. les Académiciens, & datée de Verſailles le 1er Juillet 1778. Préſenté de ſa part.

Guériſon de la paralyſie par l'Electricité: ouvrage imprimé à Paris en 1772, avec la continuation publiée en 1778.

Le 23 Août. Le Secrétaire a remis le Programme de Prix de la Societé hollandoiſe des Sciences établie à Harlem, pour l'année 1779.

Le 6 Septembre. Le Secrétaire a remis de la part de l'Académie Royale des Sciences de Paris:

Hiſtoire de l'Académie Royale des Sciences avec les Mémoires pour l'Année 1775.

Connoiſſance des Temps pour l'Année 1781.

—— —— de la part de M. l'Abbé *Rozier*:

Obſervations ſur la Phyſique —— Supplément, Tome XIIIe.

Obſer-

Obſervations ſur la Phyſique, ſur l'Hiſtoire naturelle & ſur les Arts depuis le mois d'Avril 1778 jusqu'au Mars 1779.

—— —— de la part de M. le Prof. *Koelpin* à Stettin:

Practiſche Bemerkungen über den Gebrauch der Sibiriſchen Schneeroſe in Gicht-Kranckheiten.

—— —— S. E. M. de *Stæhlin* a lu une lettre du *R. P. Cibot* Miſſionaire à Pe-king datée du 10 Oct. 1777 & accompagnée d'un traité des Agarics.

Le 13 Septembre. M. le Prof. *Güldenſtädt* a lu une lettre de M. *Hablitz'l* datée d'Aſtrachan du 20 Août. Ce correſpondant aſſidu rapporte les circonſtances qui avoient accompagné la dernière inondation en Mai, & fait un recit détaillé des déſaſtres qui en ont été les ſuites. Il communique enſuite les obſervations de la crue des eaux à Aſtrachan depuis le 20 Avril jusqu'au 18 Juillet & envoie une production de mouſſe formée après que l'eau de la Wolga ſe fût rétirée.

Le 23 Septembre. Le Secrétaire a lu une lettre de M. le Conſeiller de Cour *Käſtner* à Göttingue qui envoie de la part de la Societé Royale des Sciences:

Novi Commentarii Societatis regiae Scientiarum Göttingenſis Tom. VIII ad annum 1777.

Commentationes Societatis regiae Scientiarum Göttingenſis per Annum 1778. Vol. I.

—— —— & de la part des Auteurs:

In

Infinitomii dignitatum exponentis indeterminati Hiſtoria, leges ac formulae: Editio pluribus locis aucta. Auctore *Carolo Friderico Hindenburg.*

Abr. Gottb. Käſtner, über die Änderung des Gangs der Pendel-Uhren im Sommer und im Winter.

Le 30 Septembre. Le Secrétaire a diſtribué le Proſpectus du Recueil des Ecrits de *J. J. Rouſſeau* propoſé par ſouſcription à Génève, chez la Société Typographique.

Le 4 Octobre. Le Directeur, M. de *Domaſchnef*, a communiqué un mémoire par lequel l'Académie eſt prié de fournir à M. *Du Hamel du Monceau*, Académicien de Paris, des Eclairciſſemens ſur les diverſes eſpèces de Pin de Ruſſie. Mrs. *Pallas* et *Güldenſtädt* ont été chargés d'y répondre.

Le 10 Octobre. Le Secrétaire a lu une lettre adreſſée à l'Académie par Mrs. le Baron de *Mariwetz* & *Gouſſiers* qui envoient un Diſcours imprimé, ſervant de Proſpectus à un Traité général de Géographie phyſique & particulierement de celle du Royaume de France, avec pluſieurs cartes gravées. Mrs. *Pallas* et *Güldenſtädt* ont été invités à leur communiquer les Obſervations qu'ils ont faites dans leurs voyages.

Le 12 Octobre. Aſſemblée publique: voyez cideſſus pag. 3.

Le 18 Octobre. M. le Profeſſeur *Güldenſtädt* a préſenté de la part de M. *Hablitz'l*, une belle collection d'inſectes faite aux environs d'Aſtrachan, & une eſpèce de colle de poiſſons peu commune, préparée d'une maniere particulière & moulée dans des formes figurées, d'où elle eſt auſſi nommée вареной фигурной Клѣй.

Ce même Correſpondant académique communique une expérience d'Agriculture qui a très bien réuſſi: qui eſt de cultiver chaque printemps les champs ſubmergés par le Wolga de la même manière que les habitans d'Egypte cultivent ceux que le Nil inonde; de les labourer peu de jours avant le débordement du fleuve, d'y ſemer d'abord après ſon écoulement en Juillet les grains du blé qu'on voudra moiſſoner, & de les herſer. M. *Hablitz'l* en avoit fait l'eſſai & rapporte avoir obtenu une moiſſon très abondante.

Le 21 Octobre. Le Secrétaire a lu une lettre de M. le Prof. *Gleditſch*, datée de Berlin le 2 Juillet qui envoie:

Einleitung in die Wiſſenſchafft der rohen und einfachen Arzney-Mittel. 1er Theil.

—— —— il a préſenté de la part de M. *Jean Bernoulli* de Berlin, les ouvrages ſuivans:

Reiſen durch Brandenburg, Pommern, Preuſſen, Curland, Rußland und Pohlen, in den Jahren 1777 und 1778. 6 Bände.

Lettres ſur différens ſujets écrites pendant le cours d'un voyage par l'Allemagne, la Suiſſe, la France méridionale & l'Italie en 1774 & 1775, 3 Tomes.

Nouvelles Littéraires de divers pais: IV. Cahier, 2. Partie.

Le 11. Novembre. Le Secrétaire a préſenté les ouvrages ſuivans qui lui avoient été adreſſés de Londres, de la part de la Societé royale des Sciences.

Philoſophical Transactions. T. 68. Vol. 1. 2.

A Diſcourſe on the Theory of Gunnery —— by Sir John Pringle, Baronet.

Et de la part des Auteurs:

Deſcription & Uſages des Inſtrumens d'Aſtronomie & de Phyſique faits à Londres par ordre de la Cour de Portugal en 1778 & 1779. Par M. de *Magellan*.

Table de la valeur de chaque diviſion de 96 dans l'arc des Quadrans aſtronomiques de 90 degrés. Par le même.

Experiments and Obſervations on animal Heat by Adair *Crawford*.

A Reſtitution of the Geometrical Treatiſe of Apollonius Pergaeus on Inclinations —— by Reuben *Burrow*.

A Treatiſe on Silk, Wool, Worſted, Cotton and thread deſcribing their Nature, Properties, and Qualitys —— by R. *March*.

Ex-

Experiments on electricity being an Attempt to ſhew the advantage of elevated pointed conductors by Edward *Nairne*.

Le 18. Novembre. Le Secrétaire a préſenté de la part de M. le Prof. *Matthei* de Moscou les divers ouvrages qu'il a publiés, & qui ſont:

Notitia codicum manuſcriptorum graecorum.

J. Xiphilini & Baſilii magni aliquot orationes Gloſſaria graeca minora & alia anecdota graeca.

Chreſtomathia graeca.

Victoris Catena in Marcum.

Gregorii Theſſalonicenſis X orationes.

Iſocratis Demetrii Cydone & Michaelis Glycae aliquot epiſtolae.

Plutarchus de vitioſa verecundia.

Plutarchi Libellus de ſuperſtitione & Demoſthenis oratio funebris.

Lectiones mosquenſes.

auxquels ſe trouvoit joint un manuſcript que l'Académie a fait imprimer depuis, & dont le titre eſt

Index codicum manuſcriptorum graecorum Bibliothecarum Mosquenſium ſanctiſſimae Synodi Eccleſiae orthodoxae Graeco-Roſſicae.

Le 25 Novembre. S. E. Monſieur de *Domaſchnef* a envoyé de la part de l'Auteur un Manuſcript intitulé:

Appendix ad floram Ingricam ſiue Catalogus plantarum circa Petropolin creſcentium a Doctore Gre-

gorio *Sobolevſki* nuper detectarum & ſecundum Ill. Linnaei Syſtema definitarum, quae in Flora Ingrica non reperiuntur.

L'Impreſſion de cet ouvrage a été remiſe pour une nouvelle Edition de la *Flora Ingrica.*

Le 20. Décembre. Le Secrétaire a préſenté de la part de M. l'Abbé *Poczobut*:

Cahiers des obſervations aſtronomiques faites à Vilna en 1777.

Le Secrétaire a préſenté tous les mois les Obſervations météorologiques faites à Berlin par M. l'Académicien *Béguelin* & à Moscou par M. l'Aſſeſſeur *Engel.*

MATHE-

MATHEMATICA.

SUR

LES FONCTIONS INDÉFINIES.

Par

Mr. le Marquis de CONDORCET.

L'honneur que l'Académie a daigné faire à mes foibles eſſais ſur les fonctions indéfinies, me fait eſpérer qu'elle voudra bien recevoir avec bonté quelques nouvelles réflexions ſur la même matière.

Je me propoſerai d'abord de donner la manière d'exprimer ces fonctions lorsque leur expoſant eſt négatif. On ſait en général que, ſi on a une fonction a^n, n étant négatif, par exemple égal à $-n'$, on a

$$a^n = a^{-n'} = \frac{1}{a^{n'}},$$

& qu'ainſi on peut ſubſtituer à toute fonction a^n, lorsque $n = -n'$, la fonction $\frac{1}{a^{n'}}$, où le dénominateur $a^{n'}$ ſe forme de la même manière que a^n dans l'hypothèſe de n

 poſi-

poſitif. Mon but eſt de reduire ſemblablement à des fonctions indéfinies, dont l'expoſant ſoit poſitif, les fonctions indéfinies dont l'expoſant eſt négatif.

Soit 1°. la fonction $F^{\prime\prime\prime n} = X^{\prime} X^{\prime\prime} \ldots\ldots X^{\prime\prime\prime n}$, où $X^{\prime\prime\prime n}$ eſt une fonction de telles quantités qu'on voudra, & de n, telle qu'elle ſoit $X^{\prime}$ lorſque $n = 1$, $X^{\prime\prime}$ lorſque $n = 2$, & ainſi de ſuite, & que X ſoit ce que devient $X^{\prime\prime\prime n}$ lorſque $n = 0$, $X_{,}$ ce que devient $X^{\prime\prime\prime n}$ lorſque $n = -1$, $X_{,,}$ ce que devient $X^{\prime\prime\prime n}$ lorſque $n = -2$, & en général $X_{,,,n}$ ce que devient $X^{\prime\prime\prime n}$ lorſque $n = -n$. Nous aurons d'abord en général $F^{\prime\prime\prime n+1} = X^{\prime\prime\prime n+1} F^{\prime\prime\prime n}$, & il faudra chercher d'après cette équation les valeurs de la fonction F, $F_{,}$, $F_{,,}$, ... $F_{,,,n}$ lorſque $n = 0, -1, -2, \ldots -n$. Soit d'abord $n = 0$; nous aurons l'équation $F^{\prime} = X^{\prime} F$; or $F^{\prime} = X^{\prime}$, donc $F = 1$. Soit $n = -1$; nous aurons $F = X F_{,}$, ou $F_{,} = \frac{1}{X}$. Soit $n = -2$; nous aurons $F_{,} = X_{,} F_{,,}$, ou $F_{,,} = \frac{1}{X X_{,}}$; d'où en général pour l'expoſant $-n$,

$$F_{,,,n} = \ldots\ldots \frac{1}{X X_{,} X_{,,} \ldots\ldots X_{,,,n-1}}.$$

Juſqu'ici nous n'avons conſidéré que le cas de n égal à un nombre entier. Mais la même formule a lieu lorſque n eſt un nombre quelconque. Soit en effet ici $X_{,,,n}$ la valeur de X lorſque $n = -n$, $X_{,,,n-1}$ la valeur de X lorſque n eſt $-n+1$, $X_{,,,n-2}$ la valeur de X lorſque n eſt $-n+2$, & ainſi de ſuite, & $F_{,,,n}$ la valeur inconnue de F lorſque n eſt $-n$; nous aurons en général

$$F^{\prime\prime\prime m-n} = F_{,,,n} X_{,,,n-1} X_{,,,n-2} \ldots\ldots X^{\prime\prime\prime m-n}.$$

Donc

Donc faiſant $m = n$, nous aurons

$$F = F_{,,,n} X_{,,,n-1} X_{,,,n-2} \ldots\ldots X, \text{ ou } F_{,,,n} = \frac{1}{X_{,,,n-1} X_{,,,n-2} \ldots\ldots X}.$$

Si tous les X ſont conſtans & indépendans de n, nous aurons

$$F'''^{n} = X^{n}, \; F = 0; \; \& \; F_{,,,n} = \frac{1}{X^{n}},$$

comme on le ſait d'avance. Voyez ſur ces fonctions de produits un très beau Mémoire de M. de *Vandermonde*. Mém. de l'Académie 1772.

Soit 2°. la fraction continue indéfinie :

$$F'''^{n} = \cfrac{1}{X'''^{n} \ldots\ldots \cfrac{\ldots 1}{X''' + \cfrac{1}{X'' + \cfrac{1}{1 + X'}}}}$$

où l'on a, lorſque $n = 1$, $F' = \frac{1}{1 + X'}$;

lorſque $n = 2$, $F'' = \cfrac{1}{X'' + \cfrac{1}{1 + X'}}$;

lorſque $n = 3$, $F''' = \cfrac{1}{X''' + \cfrac{1}{X'' + \cfrac{1}{1 + X'}}}$,

& en général

$$F'''^{n+1} = \frac{1}{X'''^{n+1} + F'''^{n}}.$$

Nous aurons pour $n = 0$,

$$F' = \frac{1}{X' + F}, \text{ d'où } \frac{1}{1 + X'} = \frac{1}{X' + F}, \text{ et } F = 1.$$

Pour $n = -1$, $F = \frac{1}{X + F_{,}}$, d'où $F_{,} = 1 - X$; ſi $n = -2$, nous aurons

$$F_{,} = 1 - X = \frac{1}{X_{,} + F_{,,}}, \text{ d'où } F_{,,} = -X_{,} + \frac{1}{1 - X};$$

ſi $n = -3$, nous aurons

$$F_{,,} = \frac{1}{X_{,,} + F_{,,,}}, \text{ d'où } F_{,,,} = -X_{,,} + \frac{1}{F_{,,}} = -X_{,,} + \frac{1}{-X_{,} + \frac{1}{1 - X}};$$

& en général on aura la formule:

$$F_{,,,n} = -X_{,,,n-1} \;\cdots\cdots \; \cdots + \frac{1}{-X_{,,,} + \frac{1}{-X_{,,} + \frac{1}{-X_{,} + \frac{1}{1 - X}}}}$$

le nombre des diviſions étant repété n fois dans $F^{,,,n}$, & ſeulement $n - 1$ fois dans $F_{,,,n}$, & on prouvera de même que ci-deſſus que cette formule eſt bonne non ſeulement pour n entier & négatif, mais pour n quelconque & négatif. En effet en conſervant les mêmes dénominations, ſoient $X_{,,,n}$ & $F_{,,,n}$ les valeurs de X & de F qui répondent à une valeur quelconque $-n$ de n, nous aurons la ſuite d'équations:

$$F_{,,,n-1} = \frac{1}{F_{,,,n} + X_{,,,n-1}};$$

F

$$F_{'''n} = -X_{'''n-1} + \frac{1}{F_{'''n-1}};$$

$$F_{'''n-2} = \frac{1}{F_{'''n-1} + X_{'''n-2}};$$

$$F_{'''n-1} = -X_{'''n-2} + \frac{1}{F_{'''n-2}}; \text{ \&c. \&c. \&c.}$$

jusqu'à

$$F'''^{m-n} = \frac{1}{F'''^{m-n+1} + X'''^{m-n}};$$

$$F_{'''m-n+1} = -X'''^{m-n} + \frac{1}{F'''^{m-n}};$$

d'où, ſi $m = n$, & $F'''^{m-n} = F = 1$, on a

$$F_{'''n} = -X_{'''n-1} + \cfrac{1}{-X_{'''n-2} + \cfrac{1}{-X_{'''n-3}\ldots \atop \cdots\cdots\cdots -X_{'} + \cfrac{1}{-X+1}}}$$

Nous ne repéterons plus cette démonſtration pour les autres formules indéfinies.

Si tous les X ne varient pas avec n, & ſont égaux à X, on a

$$F'''^{n} = \cfrac{1}{X + \cfrac{1}{X + \cfrac{1}{X + \cfrac{1}{X + \text{\&c.}}}}}$$

$$\cdots\cdots$$

&

$$\& \quad F_{,,,n} = -X + \cfrac{1}{-X + \cfrac{1}{-X + \cfrac{1}{-X + \&c.}}}$$

$$\cdots\cdots$$

le nombre des X étant multiplié n fois dans ces formules.

Soit $n = \frac{1}{0}$, nous aurons Φ, valeur de F dans ce cas, donné par l'équation

$$\Phi = \frac{1}{X + \Phi}, \text{ ou } \Phi = -\tfrac{1}{2}X \pm \sqrt{(1 + \tfrac{1}{4}X^2)}.$$

Soit $n = -\frac{1}{0}$, & $\Phi_{,}$ la valeur de F dans ce cas, nous aurons

$$\Phi_{,} = -X + \frac{1}{\Phi_{,}}, \text{ d'où } \Phi_{,} = -\tfrac{1}{2}X \pm \sqrt{(1 + \tfrac{1}{4}X^2)}.$$

Le ſigne $+$ convient à la fois à ces deux valeurs Φ & $\Phi_{,}$. En effet 1°. Elles ſont égales, entr'elles puisque $\Phi_{,} = -X + \Phi'$, Φ' étant ce que devient Φ en y mettant $-X$ au lieu de X. Or ſoit qu'on prenne la ſigne $+$, ſoit qu'on prenne le ſigne $-$, on aura toujours:

$$\Phi = -\tfrac{1}{2}X + \sqrt{(1 - \tfrac{1}{4}X^2)} = -X + \Phi' = -X + \tfrac{1}{2}X + \sqrt{(1 - \tfrac{1}{4}X^2)}$$

ou bien

$$\Phi = -\tfrac{1}{2}X - \sqrt{(1 - \tfrac{1}{4}X^2)} = -X + \Phi' = -X + \tfrac{1}{2}X - \sqrt{(1 - \tfrac{1}{4}X^2)}.$$

2°. Lorsque $X = 0$, les deux ſéries ſe reduiſent également à l'unité, de même que les valeurs de Φ & $\Phi_{,}$ en prenant le ſigne poſitif.

Quant aux valeurs

$$-\tfrac{1}{2}X - \sqrt{(1 - \tfrac{1}{4}X^2)} \text{ de } \Phi \text{ \& } \Phi_{,},$$

elles

elles repréſenteront les deux fonctions:

$$-X-\cfrac{1}{X+\cfrac{1}{X+\cfrac{1}{X+\&c.}}}$$

$$\&\quad\cfrac{-1}{-X+\cfrac{1}{-X+\cfrac{1}{-X+\&c.}}}$$

Soit 3°. la fonction

$$F^{\prime\prime\prime n}=\sqrt[m]{}(X^{\prime\prime\prime n}+\ldots\ldots\sqrt[m]{}(X^{\prime\prime\prime}+\sqrt[m]{}(X^{\prime\prime}+\sqrt[m]{}X^{\prime})))$$

où l'on a

$$F^{\prime}=\sqrt[m]{}X^{\prime},\ F^{\prime\prime}=\sqrt[m]{}(X^{\prime\prime}+\sqrt[m]{}X^{\prime}),$$

$$F^{\prime\prime\prime}=\sqrt[m]{}(X^{\prime\prime\prime}+\sqrt[m]{}(X^{\prime\prime}+\sqrt[m]{}X^{\prime})),$$

& en général

$$F^{\prime\prime\prime n+1}=\sqrt[m]{}(X^{\prime\prime\prime n+1}+F^{\prime\prime\prime n}).$$

Nous aurons donc pour $n=0$, $F^{\prime}=\sqrt[m]{}(X^{\prime}+F)$, d'où $F=0$; pour $n=-1$,

$$F=0=\sqrt[m]{}(X+F_{\prime}),\ \text{d'où}\ F_{\prime}=-X$$

pour $n=-2$,

$$F_{\prime}=-X=\sqrt[m]{}(X_{\prime}+F_{\prime\prime}),\ \text{d'où}\ F_{\prime\prime}=(-X)^{m}-X_{\prime};$$

pour $n=-3$,

$$F_{\prime\prime}=(-X)^{m}-X_{\prime}=\sqrt[m]{}(X_{\prime\prime}+F_{\prime\prime\prime}),\ \text{d'où}$$

$$F_{\prime\prime\prime}=((-X)^{m}-X_{\prime})^{m}-X_{\prime\prime},$$

& ainſi de ſuite, & en général

$$F^{\prime\prime\prime n} = \overline{\overline{\overline{-X^m - X_{\prime}}^m - X_{\prime\prime}}^m - X_{\prime\prime\prime}}^m \ldots\ldots - X_{\prime\prime\prime n-1}.$$

Suppoſant maintenant que les X ne changent pas en même tems que n, nous aurons

$$F^{\prime\prime\prime n} = \sqrt[m]{(X + \sqrt[m]{(X + \sqrt[m]{(X + \&c.)})})} \ \&$$

$$F_{\prime\prime\prime n} = \overline{\overline{-X^m - X}^m - X}^m - \&c. \ldots\ldots - X;$$

où il faut obſerver que les radicaux ſucceſſifs ſont repétés n fois dans $F^{\prime\prime\prime n}$, au lieu que les élévations aux puiſſances ne ſont repétées que $n - 1$ fois dans $F_{\prime\prime\prime m}$.

Suppoſons maintenant dans la première formule $n = \frac{1}{0}$, & ſoit Φ la valeur de $F^{\prime\prime\prime n}$, qui répond à $\frac{1}{0}$, nous aurons $\Phi = \sqrt[m]{(\Phi + X)}$, ou $\Phi^m - \Phi = X$. Si on ſuppoſe $n = -\frac{1}{0}$, & qu'on appelle $\Phi_{\prime}$ la valeur de $F_{\prime\prime\prime n}$ dans ce cas, on aura encore $\Phi_{\prime} = \Phi_{\prime}^m - X$, ou $\Phi_{\prime}^m - \Phi_{\prime} = X$.

Examinons maintenant ce qui doit réſulter des différentes ſuppoſitions qu'on peut faire pour les différentes valeurs de m.

Soit d'abord m poſitif & > 1. Si on ſuppoſe $X = 0$, on a $\Phi = 1$; ainſi pour cette valeur de m, il faudra prendre pour la véritable expreſſion de Φ la racine de l'équation $\Phi^m - \Phi = X$, qui devient 1 lorsqu'on fait $X = 0$. Soit par exemple $m = 2$, on a

$$\Phi^2 - \Phi = X, \ \Phi = \tfrac{1}{2} \pm \sqrt{(\tfrac{1}{4} + X)};$$

il faudra donc prendre le ſigne +, puisque, faiſant $X = 0$,

on

on a alors $\Phi = 1$. L'expreſſion de $\sqrt[n]{}\sqrt{(X + \sqrt{X})}$ ſera donc $\frac{1}{2} + \sqrt{(\frac{1}{4} + X)}$, lorſque $n = \frac{1}{0}$.

Dans la même hypothèſe ſi, n étant $-\frac{1}{0}$, on ſuppoſe $X = 0$, on a $\Phi_{,} = 0$; donc il faudra prendre la racine de l'équation en $\Phi_{,}$, qui devient zero lorſque $X = 0$. Soit, par exemple, $m = 2$, la valeur de $\Phi_{,}$ ſera la racine de l'équation $\Phi_{,}^2 - \Phi_{,} = X$, qui eſt zero lorſque $X = 0$, c'eſt à dire qu'on aura $\Phi_{,} = \frac{1}{2} - \sqrt{(\frac{1}{4} + X)}$, d'où on tirera

$$1°. \sqrt{(X+\sqrt{(X+\sqrt{(X+\sqrt{(X\ldots)))}}}} + (-X)^2 - X)^2 - X)^2 - X)))^2 \ldots = 1,$$

les deux ſéries étant continuées à l'infini, & cette valeur de leur ſomme reſtant la même, quel que ſoit X.

$$2°. (\sqrt{(X+\sqrt{(X+\sqrt{(X+\sqrt{(X\ldots\ldots)}}}} \times ((-X)^2 - X))^2 - X))^2 \ldots - X) = X$$

ſéries qui nous paroiſſent aſſez dignes de remarque.

Suppoſons maintenant m poſitif, mais < 1. Il eſt aiſé de voir que le cas ne diffère du précédant, qu'en ce que Φ devient $(\Phi_{,} + X)$, & réciproquement que X devient $-X$, & m devient $\frac{1}{m}$.

Suppoſons enſuite que m ſoit négatif, ou égal à $-m$, m étant > 1, & pris poſitivement. Nous trouverons, en faiſant la même ſuppoſition de $X = 0$, que F eſt ſucceſſivement

$$0^{-\frac{1}{m}},\ 0^{+\frac{1}{m^2}},\ 0^{-\frac{1}{m^3}},\ 0^{+\frac{1}{m^4}},\ \&c.,$$

& quand $n = \frac{1}{0}$, on aura

 $\Phi =$

$$\Phi = o^{\overline{m^{\frac{1}{0}}}}, \text{ ou } o^{-\frac{1}{m^{\frac{1}{0}}}} = \frac{1}{o^{\frac{1}{m^{\frac{1}{0}}}}}.$$

Donc $\Phi = 1$ dans les deux cas. Nous devons donc prendre ici la racine de l'équation en Φ, qui eſt 1 lorſque $X = 0$.

Soit $m = -1$; nous aurons $\frac{1}{\Phi} - \Phi = X$, d'où

$$\Phi^2 + \Phi X - 1 = 0, \ \& \ \Phi = -\tfrac{1}{2}X \pm \sqrt{(1 + \tfrac{1}{4}X)}.$$

Donc on doit prendre le ſigne $+$, & l'on aura

$$\Phi = -\tfrac{1}{2}X + \sqrt{(1 + \tfrac{1}{4}X)}.$$

comme on l'a trouvé cy-deſſus.

Soit $m = -2$; on aura $\frac{1}{\Phi^2} - \Phi = X$, d'où $\Phi^3 + \Phi^2 X = 1$, & il faudra prendre la racine qui donne $\Phi = 1$ lorſque $X = 0$.

Quand $n = -\frac{1}{0}$, nous avons ſucceſſivement F égal à $(-0)^{-m}$, $(-0)^{m^2}$, $(-0)^{-m^3}$, &c. quantité qui eſt alternativement ou zero, ou de l'ordre $\frac{1}{0}$; ce qui ne donne aucun réſultat.

Suppoſons toujours m négatif ou égal à $-m$, m étant < 1, & pris poſitivement. Nous aurons pour les valeurs conſécutives de F, $o^{-\frac{1}{m}}$, $o^{\frac{1}{m^2}}$, $o^{-\frac{1}{m^3}}$, &c. valeurs qui ſeront alternativement zero, ou de l'ordre $\frac{1}{0}$; ce qui ne donnera encore aucun réſultat. Mais dans le cas de $n = -\frac{1}{0}$, on a dans la même hypothèſe les valeurs ſucceſſives de F égales à

$$(-0)^{-m}, \ (-0)^{+m^2}, \ (-0)^{-m^3}, \ \&c.$$

& quand $n = -\frac{1}{0}$, on a

$$\phi_{\prime} = (-0)^{\pm \frac{m}{0}} = 1;$$

& il faut prendre ici la racine de l'équation

$$\frac{1}{\phi_{\prime}^{\,m}} - \phi = X, \text{ ou } \phi_{\prime}^{\,m+1} + X\phi_{\prime} = 1,$$

qui devient 1 lorsque $X = 0$.

On auroit été conduit au même réſultat en obſervant que ce qu'on appelle ici $\phi_{\prime}$ eſt égal à $\phi' - X$, ϕ' étant ce que devient ϕ en ſuppoſant X égal à $-X$, & $\frac{1}{m}$ au lieu de m. Or on auroit alors $\frac{1}{\phi'^{\frac{1}{m}}} - \phi' = -X$, & il faudroit prendre pour ϕ' la racine qui eſt 1 lorſque $X = 0$. Donc il faudra prendre pour $\phi' - X$, ou $\phi_{\prime}$ la racine de l'equation en $\phi_{\prime}$, qui devient l'unité lorſque $X = 0$.

Nous avons vû cy-deſſus que nous n'avons point directement la valeur de ϕ dans le cas où l'expoſant du radical eſt $-m$ pour $n = \frac{1}{0}$, m étant < 1, ni dans le cas où l'expoſant eſt $-m$, m étant > 1 pour $n = -\frac{1}{0}$. Nous ſavons que l'un de ces deux cas peut ſe reduire à l'autre. Nous nous bornerons donc à en conſidérer un.

Soit donc l'équation $\phi^{-m} - \phi = X$, qui eſt celle du Problème. Differentions cette équation, pour avoir le rapport de la différence de ϕ à celle de m. Nous aurons

$$\frac{d\Phi}{dm} = -l\Phi . \frac{\Phi}{\Phi^{-m+1}+m},$$

& pour le cas de $X = 0$,

$$\frac{d\Phi}{dm} = -l\Phi . \frac{\Phi}{\Phi^{2}+m}.$$

Or ſi pour $m > 1$ nous avons $\Phi = 1$, il eſt aiſé de voir de cette formule que Φ reſtera 1 tant que m ſera poſitif. Donc il faudra dans les formules cy-deſſus prendre, comme dans les autres formules, la racine de l'équation $\Phi^{m+1} + \Phi^{m} X = 1$, qui devient 1 lorsque $X = 0$.

Conſidérons maintenant cette fonction d'une autre forme:

$$F^{\prime\prime\prime n} = {}^{n}/\sqrt[m]{(X+\sqrt[m]{(X+\sqrt[m]{(X+\ldots\ldots\sqrt[m]{(X+A)})}})},$$

qui eſt égale à $\sqrt[m]{(X+A)}$ lorsque $n = 1$;

à $\sqrt[m]{(X+\sqrt[m]{(X+A)})}$

lorsque $n = 2$. On aura pour $n = 0$,

$$F' = \sqrt[m]{(X+A)} = \sqrt[m]{(X+F)}, \text{ ou } F = A;$$

pour $n = -1$,

$$F = A = \sqrt[m]{(X+F_{\prime})}, \text{ ou } F_{\prime} = A^{m} - X;$$

pour $n = -2$,

$$F_{\prime} = A^{m} - X = \sqrt[m]{(X+F_{\prime\prime})}, \text{ ou } = F_{\prime\prime} = \overline{A^{m} - X}^{m} - X,$$

& en général

$$F_{\prime\prime\prime n} = {}^{n-1}/\overline{\overline{\overline{A^{m} - X}^{m} - X}^{m} - X \ldots\ldots} - X,$$

& on voit que dans ces fonctions, lorsque l'expoſant eſt n, le nombre des extractions ou des élévations à la puiſ-

puiſſance $\frac{1}{m}$ eſt repété n fois, & que pour l'expoſant $-n$ le nombre des élévations à la puiſſance m n'eſt repété que $n-1$ fois.

Si on appelle Φ, comme cy-deſſus, la valeur de $F^{/n}$ lorsque $n=\frac{1}{0}$, & $\Phi_{/}$ la valeur de $F^{/n}$ lorsque $n=-\frac{1}{0}$, on trouvera comme cy-deſſus les équations.

$$\Phi^m - \Phi = X,\ \Phi_{/}^m - \Phi_{/} = X,$$

qui ſe trouvent ici indépendantes de la quantité A, & qu'il faut examiner dans les hypothèſes de m poſitif & de m négatif, de $m >$ & < 1, pour connoître la vraie valeur de Φ & de $\Phi_{/}$.

Soit m poſitif & > 1. Suppoſons $X = 0$, nous aurons $\Phi = A^{\circ} = 1$; donc Φ égalera la racine de l'equation en Φ, qui devient 1 lorsque $X = 0$. Soit m poſitif & < 1; nous aurons $\Phi = A^{\frac{1}{m}\cdot\frac{1}{0}} = A^{\frac{1}{0}}$: valeur qui ne convient avec les racines de l'équation en Φ que lorsque $A < 1$, & dans ce cas on a $\Phi = 0$.

Maintenant ſi l'on cherche $\Phi_{/}$, il eſt clair que $\Phi_{/}$ eſt égal à la valeur de Φ pour $\frac{1}{m}$, en y mettant $-X$ au lieu de X, & en retranchant X; donc ſi $m > 1$, & $A < 1$, nous aurons $\Phi_{/}$ égal à la racine de l'équation en $\Phi_{/}$, qui devient zero lorsque $X = 0$; & ſi $m > 1$, nous aurons $\Phi_{/}$ égal à la racine de l'équation en $\Phi_{/}$, qui devient 1 lorsque $X = 0$.

Soit priſe pour exemple la fonction

$$^n/\sqrt{}(2+\sqrt{}(2+\sqrt{}(2\ldots\ldots+\sqrt{}(2+\sqrt{}3)),$$

où

où $m = 2$, $X = 2$, & $A = \sqrt{3}$, laquelle eſt $\sqrt{(2 + \sqrt{3})}$ lorsque $n = 1$. Elle ſera, d'après ce que nous avons dit cy-deſſus, $\sqrt{3}$ lorsque $n = 0$, & 1 lorsque $n = -1$, & -1 pour toutes les autres valeurs de n.

La formule précédente eſt égale à cette expreſſion: $2 \text{ coſ. } \frac{\pi}{6 . 2^n}$, π étant la demie-circonférence. Soit maintenant n' un nombre entier, $\text{coſ. } \frac{\pi}{n'}$, & par conſéquent $2 \text{ coſ. } \frac{\pi}{n'}$ ſera donné par une équation du degré $2 n'$. Faiſant $6 . 2^n = n'$, nous aurons $n = \frac{l \frac{n'}{6}}{l 2}$; d'où réſulte cette concluſion, que la fonction indéfinie

$$\sqrt{(2 + \sqrt{(2 + \sqrt{(2 + \sqrt{(2 \ldots\ldots + \sqrt{(2 + \sqrt{3})})}}}}},$$

le nombre des radicaux étant repété n fois, ſera donnée par une équation algébrique du degré $2 n'$ toutes les fois que $n = \frac{l \frac{n'}{6}}{l 2}$, n' étant un nombre entier. Nous ſavons également que $\text{coſ. } \frac{n''}{n'} \pi$, n'' & n' étant des nombres entiers, & par conſéquent auſſi $2 \text{ coſ. } \frac{n''}{n'} \pi$, eſt donné par une équation algébrique du degre $2 n'$, & nous aurons alors, à cauſe de $6 . 2^n = \frac{n'}{n''}$,

$$n = \frac{l \frac{n'}{6 n''}}{l 2}, \text{ ou } n = \frac{l n' - l n'' - l 6}{l 2}.$$

Mais nous ſavons que le coſinus d'un angle ne varie point lorsqu'on ſuppoſe cet angle augmenté de la quantité $2 n_{,} \pi$, $n_{,}$ étant un nombre entier; donc la formule cy-deſſus ne variera point, tant qu'on ajoutera ou retranchera

chera de n'' un nombre $2\,n_{,}\,n'$. Soit donc $n = \frac{l n' - l 6}{l 2}$, n étant un nombre entier; les valeurs de la fonction cy-deſſus ſeront ſucceſſivement les racines d'une même équation du degré $2\,n'$, lorsqu'on retranchera de n les nombres $\frac{l 2}{l 2}$, $\frac{l 3}{l 2}$, &c. jusqu'à $\frac{l 2 n'}{l 2}$, & enſuite on aura les mêmes $2\,n'$ valeurs de la fonction en retranchant de la valeur de n, $\frac{l 2 n' + 1}{l 2}$, $\frac{l 2 n' + 2}{l 2}$, &c. enſorte que les valeurs de la fonction ſeront toujours les mêmes pour

$$n = \frac{l n' - l n'' - l 6}{l 2} \text{ \& pour } \frac{l n' - l(n'' + 2 n_{,} n') - l 6}{l 2}$$

$n_{,}$ étant un nombre entier quelconque, & que le retranchement d'une quantité $\frac{l(n'' + 2 n_{,} n') - l n''}{l 2}$ de la quantité n ne change pas la valeur de F''^{n}.

On peut tirer de ces expreſſions une méthode d'avoir, quel que ſoit n, une valeur approchée de la fonction. Suppoſons en effet que n ne ſoit pas un nombre entier, nous aurons

$$n = \frac{n'''}{n^{\mathrm{IV}}} = \frac{l n' - l n'' - l 6}{l 2}, \text{ ou } \frac{n''' \, l 2}{n^{\mathrm{IV}}} + l 6 = l \frac{n'}{n''}.$$

Nous aurons donc une valeur très approchée de $l \frac{n'}{n''}$, & par conſéquent de $\frac{n'}{n''}$, ou de $\frac{n''}{n'}$; & puisque $F'''^{n} = 2 \operatorname{coſ.} \frac{n''}{n'} \pi$, il n'y aura qu'à mettre cette valeur au lieu de $\frac{n''}{n'}$. Soit, par exemple, $n = \frac{1}{2}$, nous aurons

$$l \frac{n'}{n''} = 0,928666, \text{ ou } l \frac{n''}{n'} = -0,071334, \text{ \&}$$

$\frac{n''}{n'} = ,11785$, & l'angle dont il faut chercher le coſinus, égal à, $11785 . 180° = 21°. 12'.$, & par conſéquent nous aurons

$$\tfrac{1}{2} / \sqrt{((2 + \sqrt{(2 + \sqrt{(2 \ldots\ldots + \sqrt{(2 + \sqrt{3}))}}}}$$
$$= 2 \text{ coſ. } 21^\circ.\ 12'.$$

à très peu près. Lorsque n eſt un nombre entier négatif, la fonction précédente devient

$$2 \text{ coſ. } \frac{2^n\ \pi}{6} = 2 \text{ coſ. } \frac{2^{n-1}\ \pi}{3}, \text{ ou } 2 \text{ coſ. } \frac{2^{n-2}.\ 2\ \pi}{3};$$

ce qui, pour le cas de $n = 1$, donne $2 \text{ coſ. } \frac{\pi}{3}$, & pour les autres valeurs de n, $2 \text{ coſ. } \frac{2\pi}{3}$ & $2 \text{ coſ. } \frac{4\pi}{3}$. Or $\text{coſ. } \frac{2\pi}{3} = \text{coſ. } \frac{4\pi}{3}$. Donc pour toute autre valeur entiere de n, que -1, la formule propoſée ne changera point & ſera toujours égale à $2 \text{ coſ. } \frac{2\pi}{3}$, c'eſt à dire, à -1, comme nous l'a donné cy-deſſus la conſidération de la fonction elle même.

Si maintenant nous cherchons à appliquer à cette ſérie la méthode générale que nous avons propoſée, nous trouverons 1°. qu'à cauſe de $X = 2$, nous aurons les deux équations $\Phi^2 - \Phi = 2$, & $\Phi^2_{\prime} - \Phi_{\prime} = 2$. 2°. que puiſque pour Φ il faut prendre la racine de l'équation $\Phi^2 - \Phi = X$, qui devient 1 lorſque $X = 0$, nous devons prendre la racine de l'équation en Φ, où le radical a le ſigne $+$, & qu'ainſi dans cet exemple on a

$$\Phi = \tfrac{1}{2} + \sqrt{(2 + \tfrac{1}{4})} = 2.$$

3°. que pour le cas de $n = -\frac{1}{c}$ la méthode ne donne aucun réſultat pour la valeur de $\Phi_{\prime}$. Cependant nous avons trouvé que $\Phi_{\prime}$ devoit être égal à la racine de l'équation $\Phi^2_{\prime} - \Phi_{\prime} = 2$, en donnant au radical le ſigne $-$. La contradiction entre ces deux méthodes apprend avec quelle précaution il faut ſe ſervir de la première. En effet

effet d'abord nous avons ici $\overline{\overline{A^m - X}^{\,-m} - X}^{\,-m}$ ......, ce qui, faiſant $\overline{A^m - X}^{\,-m} = A'$, nous donne une fonction $\overline{\overline{A' - X}^{\,-m} - X}^{\,-m}$ ...., & faiſant $\overline{A' - X}^{\,-m} = A''$, une fonction $\overline{\overline{A'' - X}^{\,-m} - X}^{\,-m}$ ...., & ainſi de ſuite; d'où il réſulte qu'aucune concluſion ne peut être regardée comme certaine, qu'autant qu'elle ſeroit la même pour toutes ces differentes fonctions. Or il eſt aiſé de voir que dans le cas particulier que nous conſidérons, où $m = 2$, & $A^m = 3$, & où on cherche la valeur de la fonction pour le cas de $X = 2$, nous aurons pour $X = 0$ la première fonction égale à $3^{2^{\frac{1}{0}}}$, lorsque $X = 0$, la ſeconde égale à $1^{2^{\frac{1}{0}}}$, lorsque $X = 0$, la troiſième égale à $(-1)^{2^{\frac{1}{0}}}$, & ainſi de ſuite. Nous obſervons de plus que la concluſion que $\phi_{,} = A^{m^{\frac{1}{0}}}$, lorsque $X = 0$, n'eſt légitime qu'autant que, reduiſant $\phi_{,}$ en ſerie ordonnée par rapport à X, elle ne renferme pas de termes qui ne ſoient pas nuls ou par eux-mêmes, ou devant $A^{m^{\frac{1}{0}}}$, & c'eſt ce qui arrive ici.

On auroit pû trouver immédiatement la valeur de cette fonction F'''^{n}. En effet ſoit V une fonction qui devient $V^{\frac{1}{2}}$ lorsque n devient $n + 1$; on pourra ſuppoſer

$F''''^n = V + \frac{1}{V}$. En effet dans cette hypothèſe

$$F''''^{n+1} = V^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{V^{\frac{1}{2}}} = \sqrt{(2 + V + \tfrac{1}{V})} = \sqrt{(F''''^n + 2)}.$$

Or faiſant $V = e^{\frac{a}{2^n}}$, on ſatisfait évidemment à cette hypothèſe. On pourra donc ſuppoſer $F''''^n = e^{\frac{a}{2^n}} + e^{\frac{-a}{2^n}}$; mais, par l'hypothèſe, lorſque $n = 0$, on a $F = \sqrt{3}$; donc $e^a + e^{-a} = \sqrt{3}$, d'où

$$a = \frac{\pi\sqrt{-1}}{6}, \ \& \ F''''^n = 2 \text{ coſ. } \frac{\pi}{6.\,2^n}.$$

Suppoſons qu'au lieu de cela on ait A quelconque; nous aurons $e^a + e^{-a} = A$, ou $e^{a'\sqrt{-1}} + e^{-a'\sqrt{-1}} = A$, d'où

$$F''''^n = 2.\text{ coſ.} \frac{(\text{ang. coſ.} = \frac{A}{2})}{2^n}.$$

Donc nous aurons $\Phi = 2$, quel que ſoit A; donc quel que ſoit A, $\Phi = 2$, lorſque $X = 2$. Mais ſoit

$$F''''^n = {}^n/\sqrt{((X + \sqrt{(X + \sqrt{(X + \ldots\ldots + \sqrt{X + A}))}};$$

nous avons

$$\Phi^2 - \Phi = X, \ \& \ \Phi = \tfrac{1}{2} \pm \sqrt{(\tfrac{1}{4} + X)}.$$

Or cette valeur de Φ devient 2 lorſque $X = 2$; donc il faudra prendre le ſigne + comme nous l'avons trouvé cy-deſſus.

Mais la recherche de $\Phi_{\prime}$ devient ici plus difficile. En effet nous avons

$$\Phi_{\prime} = 2 \text{ coſ. } (\text{ang. coſ.} = \tfrac{A}{2})\, 2^n,$$

n ê-

n étant $\frac{1}{0}$ dans le cas où $X = 2$, & ainſi la valeur de $\Phi_{,}$ qui doit être $\frac{1}{2} \pm \sqrt{(\frac{1}{4} + X)}$, ſera celle des deux racines $\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4}}$, qui eſt égale à $2 \operatorname{coſ.} (\text{ang. coſ.} = \frac{A}{2})\, 2^{\frac{1}{0}}$, ſi, comme le donne l'équation en $\Phi_{,}$, cette valeur ne doit pas varier avec A, comme elle eſt -1 lorsque $A = \frac{\sqrt{3}}{2}$, on en concluroit qu'elle eſt -1 dans tous les cas. Or c'eſt ce que nous ne croyons pas démontré d'une manière aſſez certaine.

Si m eſt négatif, nous aurons les équations

$$\Phi - \frac{1}{\Phi^m} = X, \; \& \; \Phi_{,} - \frac{1}{\Phi_{,}^m} = X.$$

Soit $m > 1$, nous aurons $\Phi = 0$ lorsque $X = 0$, & ſi $m < 1$, $\Phi_{,} = 0$ lorsque $X = 0$. Ainſi nous avons dans ces deux cas le moien de reconnoître la valeur de Φ ou de $\Phi_{,}$; mais la méthode ne conduit pas à trouver la valeur de Φ lorsque $m < 1$, ni celle de $\Phi_{,}$ lorsque $m > 1$.

Soit 4°. une fonction $e^{e^{e^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{e^{e^{a}}}}}}}}$, qui ſoit e^a lorsque $n = 1$; e^{e^a} lorsque $n = 2$, &c. nous avons en géné-

général $F'''^{n+1} = e^{F'''n}$. Si donc $n = 0$, nous avons $F' = e^{F}$, ou $F = l\,F' = a$; ſi $n = -1$ nous avons $F = e^{F_{,}}$, ou $F_{,} = l\,F = l\,a$; ſi $n = -2$, nous aurons

$F_{,} = e^{F_{,,}}$, ou $F_{,,} = l\,F_{,} = l\,l\,a$, & en général

$F_{,,,n} = {}^{n}/\,l\,l\,l\ldots l\,a$.

Soit $n = \frac{1}{0}$, nous avons $\Phi = e^{\Phi}$; & ſi $n = -\frac{1}{0}$, nous avons $\Phi = l\,\Phi$, qui eſt la même équation. Nous n'entreprendrons pas d'examiner ici quels réſultats on peut tirer de ces formules.

Soit la fonction $X'''n^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{X'''^{X''^{X'}}}}}}$ (n), qui eſt X' lorsque $n = 1$, $X''^{X'}$ lorsque $n = 2$, $X'''^{X''^{X'}}$ lorsque $n = 3$, & ainſi de ſuite. Nous aurons

$$F'''^{n+1} = X'''^{n+1\;F'''n}.$$

Si donc $n = 0$, nous aurons $F' = X'^{F}$ ou $F' = X'$, donc $F = 1$; ſi $n = -1$, nous avons $F = 1 = X^{F'}$, d'où $F_{,} = \frac{l1}{lX}$; ſi $n = -2$, nous avons $F_{,} = \frac{l1}{lX} = X_{,}^{F_{,,}}$, donc

$F_{,,}$

$$F_{,,} = \frac{l\frac{l\,1}{l\,X}}{l\,X}, \text{ ou } F_{,,} = \frac{ll\,1 - ll\,X}{l\,X_{,}};$$

$$F_{,,,} = \frac{l(ll\,1 - ll\,X) - ll\,X_{,}}{l\,X_{,,}},$$

& ainſi de ſuite. Soit X conſtant ou le même pour toutes les valeurs de n, nous aurons pour $n = \frac{1}{0}$, $X^{\Phi} = \Phi$; mais ſi $X = 1$, $\Phi = 1$; donc ſi on avoit la valeur générale de Φ en X, exprimée par une formule, il faudroit prendre celle des valeurs de Φ en X, qui devient 1 lorſque $X = 1$. Si on fait $n = -\frac{1}{0}$, on a également $X^{\Phi_{,}} = \Phi_{,}$, & avec la même condition. Car il eſt clair que dans le même cas de $X = 1$, $\Phi_{,} = 1$. Nous n'en conclurons pas cependant que $\Phi = \Phi_{,}$, quel que ſoit X, par ce qu'il peut y avoir pluſieurs des valeurs de Φ en X, qui donnent $\Phi = 1$ lorſque $X = 1$.

Soit réciproquement une fonction $\overline{lll\ldots\ldots lla}^{\,n}$, qui ſoit $l\,a$ lorſque $n = 1$, on trouvera, lorſque $n = 0$, $F = a$; pour $n = 1$, $F_{,} = e^{a}$, &

$$F^{,,,n} = \underbrace{e^{e^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{e^{a}}}}}}}_{n}$$

Soit une fonction $F^{,,,n} = \overline{l\ldots\ldots lX'''lX''lX'}^{\,n}$, qui eſt $l\,X'$ lorſque $n = 1$, & $l(X''\,l\,X')$ lorſque $n = 2$,

enſorte

enſorte que l'on ait $F'''^{n+1} = l X'''^{n+1} F'''^{n}$. Si $n = 0$, nous aurons $F' = l X' F$, mais $F' = l X'$, donc $F = 1$. Si $n = -1$, nous aurons $F = 1 = l X F_{,}$, ce qui donne $X F_{,} = e$, & $F_{,} = \frac{e}{X}$. Si $n = -2$, nous aurons

$$F_{,} = \frac{e}{X} = l X_{,} F_{,,}, \text{ d'où } F_{,,} = \frac{e^{\left(\frac{e}{X}\right)}}{X_{,}}.$$

On aura de même

$$F_{,,,} = \frac{e^{\left(\frac{e\left(\frac{e}{X}\right)}{X_{,}}\right)}}{X_{,,}},$$

& ainſi de ſuite.

Suppoſons que X ſoit une quantité qui ne varie pas en même tems que n; nous aurons, faiſant $n = \frac{1}{0}$, $\Phi = l X \Phi$, & $\Phi_{,} = \frac{e^{\Phi_{,}}}{X}$, ces deux équations n'étant la même équation. Maintenant ſoit $X = e$, la formule Φ devient 1, donc il faudra prendre la valeur de Φ en X, qui devient 1 lorſque $X = e$. Dans le même cas la formule $\Phi_{,}$ devient auſſi 1, ce qui donne la même condition.

Soit 5°. une fonction

$$F'''^{n} = \overline{A.\ A.\ A.\ \ldots\ldots\ldots}^{\,n}\overline{A.\ \text{ſin.}} = 1,$$

où, ſi $n = 1$, on a $F' = A.\ \text{ſin.} = a$, égal à l'angle dont le ſinus eſt a; ſi $n = 2$, on a $F'' = A.\ A.\ \text{ſin.} = a$, c'eſt à dire l'angle dont le ſinus eſt égal à l'angle dont le ſinus eſt a, & ainſi de ſuite. On aura en général

$$F'''^{n+1} = A.\ \text{ſin.} = F'''^{n}.$$

Donc

Donc ſi $n = 0$, on a $F' = \text{A. ſin.} = F$; mais $F' = \text{A. ſin.} = a$, donc $F = a$. Si $n = -1$, on a $F = a = \text{A. ſin.} = F_{,}$, donc $F_{,} = \text{ſin. } a$. Si $n = -2$, on a $F_{,} = \text{ſin. } a = \text{A. ſin.} = F_{,,}$, donc $F_{,,} = \text{ſin. ſin. } a$, &

$$F_{,,,n} = \overset{n}{\overline{\text{ſin. ſin. ſin. } \ldots\ldots \text{ ſin. } a}},$$

& on aura encore ici $\Phi = \text{A. ſin.} = \Phi$, & $\Phi_{,} = \text{ſin. } \Phi_{,}$, ce qui eſt la même équation.

Soit $F'''^{n} = \overset{n}{\overline{\text{A. ſin. } (X''' + \text{A ſin. } (X'' + \text{A ſin. } X'))}}$, où, lorsque $n = 1$, on a $F' = \text{A. ſin. } X'$; lorsque $n = 2$, $F'' = \text{A. ſin.} = (X'' + \text{A. ſin.} = X')$, & ainſi de ſuite; de manière qu'en général

$$F'''^{n+1} = \text{A. ſin.} = (X'''^{n+1} + F'''^{n}).$$

Nous aurons donc, ſi $n = 0$,

$$F' = \text{A. ſin.} = X' = \text{A. ſin.} = (X' + F), \text{ d'où } F = 0.$$

Si $n = -1$, nous aurons

$$F = 0 = \text{A. ſin. } (X + F_{,}), \text{ ou } F_{,} = -X.$$ Si $n = -2$ nous aurons

$$F_{,} = -X = \text{A. ſin.} = (X_{,} + F_{,,}), \text{ ou}$$
$$F_{,,} = -(\text{ſin. } X + X_{,});$$
$$F_{,,,} = -(\text{ſin. } (\text{ſin. } X + X_{,}) + X_{,,}),$$

& ainſi de ſuite.

Suppoſons tous les X conſtans, nous aurons $F = 0$,

$$F_{,} = -X, \quad F_{,,} = -(\text{ſin. } X + X),$$
$$F_{,,,} = -(\text{ſin. } (\text{ſin. } X + X) + X),$$

& ainſi de ſuite. On aura pour Φ l'équation $\Phi = \text{A. ſin.}$

$= (X + \Phi)$, & pour $\Phi_{,}$ une équation ſemblable, ou l'équation équivalente ſin. $\Phi_{,} = X + \Phi_{,}$. Soit $X = 0$, nous aurons $\Phi =$ A. ſin. $= 0 = 0$, & $\Phi = 0$. Donc il faudra prendre ici la valeur de Φ tirée de l'équation $\Phi =$ A. ſin. $= (X + \Phi)$, ou ſin. $\Phi = (X + \Phi)$, qui donne $\Phi = 0$ en faiſant $X = 0$, & il en ſera de même pour $\Phi_{,}$.

Soit une fonction

$$F'''^{n} = \overline{\text{A. ſin. } X''' \text{ A. ſin. } X'' \text{ A. ſin. } X'}^{\,n},$$

qui, lorſque $n = 1$, devient A. ſin. $= X'$; lorſque $n = 2$, devient A. ſin. $= X''$ A. ſin. $= X'$, & ainſi de ſuite, enſorte que l'on a $F'''^{n+1} =$ A. ſin. $X'''^{n+1} F'''^{n}$. Si $n = 0$, on aura par conſéquent $F' =$ A. ſin. $= X' =$ A. ſin. $X' F$, donc $F = 1$. Si $n = -1$, on a $F = 1 =$ A. ſin. $X F_{,}$, donc $F_{,} = \frac{\text{ſin. } 1}{X}$. Si $n = -2$, on a $F_{,} = \frac{\text{ſin. } 1}{X} =$ A. ſin. $= X_{,} F_{,,}$, ou $F_{,,} = \dfrac{\text{ſin.} \left(\frac{\text{ſin. } 1}{X}\right)}{X_{,}}$, & ainſi de ſuite. Si X eſt ſuppoſé conſtant, nous aurons $\Phi =$ A. ſin. $= X \Phi$, & $\Phi_{,} = \frac{\text{ſin. } \Phi_{,}}{X}$, ou bien par une équation ſemblable à l'équation en Φ. Mais lorſque X eſt tel que A. ſin. $= X = 1$, ou que $X =$ ſin. 1, nous avons $\Phi = 1$, & de même $\Phi_{,} = 1$. Il faudra donc prendre les valeurs de Φ ou de $\Phi_{,}$ en X, qui deviennent 1, lorſque $X =$ ſin. 1.

Soit 6°. une fonction

$$F'''^{n} = \overline{\text{ſin. ſin. ſin. } \ldots\ldots\ldots \text{ ſin. } a}^{\,n},$$

qui eſt ſin. a lorſque $n = 1$, ſin. ſin. a lorſque $n = 2$, &c. Nous avons en général $F'''^{n+1} =$ ſin. F'''^{n}. Donc, ſi $n = 0$,

nous

nous aurons $F' = \text{ſin.}\, a = \text{ſin.}\, F$, ou $F = a$. Si $n = -1$, nous avons $F = a = \text{ſin.}\, F_{,}$, ou $F_{,} = A.\, \text{ſin.} = a$; &

$$F_{,,,n} = A.\, \text{ſin.}\, ((A.\, \text{ſin.}\, (\ldots\ldots A.\, \text{ſin.}\, a.)$$

Soit $F'''^{n} = \overline{\text{ſin.}\, (X''' + \text{ſin.}\, (X'' + \text{ſin.}\, X'))}^{\,n}$,

qui devient ſin. X' lorsque $n = 1$, $\text{ſin.}\, (X'' + \text{ſin.}\, X')$ lorsque $n = 2$; & en général

$$F'''^{n+1} = \text{ſin.}\, (X'''^{n+1} + F'''^{n}).$$

Soit donc $n = 0$, on aura $F' = \text{ſin.}\, (X' + F)$, d'où $F = 0$. Si $n = -1$, on aura $F = \text{ſin.}\, (X + F_{,})$, d'où $F_{,} = -X$. Si $n = -2$, on aura $F_{,} = -X = \text{ſin.}\, (X_{,} + F_{,,})$, ou

$$F_{,,} = A.\, \text{ſin.} = (-X) - X_{,} = -(A.\, \text{ſin.} = (X) + X_{,}).$$

Si $n = -3$, on aura

$$F_{,,} = -A.\, \text{ſin.} = (X) - X_{,} = \text{ſin.}\, (X_{,,} + F_{,,,}), \text{ d'où}$$

$$F_{,,,} = A.\, \text{ſin.} = -(A\, \text{ſin.} = (X) - X_{,}) - X_{,,}, \text{ ou}$$

$$F_{,,,} = -(A.\, \text{ſin.} = (A.\, \text{ſin.} = (X) + X_{,}) + X_{,,}),$$

& ainſi de ſuite. Soit X une quantité conſtante; nous aurons

$$\phi = \text{ſin.}\, (X + \phi), \ \& \ \phi_{,} = A.\, \text{ſin.} = (\phi_{,} - X),$$

ce qui donne la même équation. Si $X = 0$, nous aurons $\phi = 0$, & $\phi_{,} = 0$, & il faudra prendre dans les valeurs de ϕ, ou de $\phi_{,}$, exprimées en X, une valeur qui devienne zero lorsque $X = 0$.

Soit la fonction

$$F'''^{n} = \overline{\ldots\ldots\, \text{ſin.}\, X'''\, \text{ſin.}\, X''\, \text{ſin.}\, X'}^{\,n},$$

qui eſt ſin. X' lorsque $n = 1$, & $\text{ſin.}\, X''\, \text{ſin.}\, X'$ lorsque $n = 2$, &c. On aura en général

$$F^{'''n+1} = \text{ſin.}\, X^{'''n+1}\, F^{'''n}.$$

Donc ſi $n = 0$, on a

$$F' = \text{ſin.}\, X' = \text{ſin.}\, X' F, \text{ d'où } F = 1.$$

Si $n = -1$, on a

$$F = 1 = \text{ſin.}\, X\, F_{\prime}, \text{ d'où } F_{\prime} = \frac{\text{A. ſin. } 1}{X}.$$

Si $n = -2$, on aura

$$F_{\prime} = \frac{\text{A. ſin. } 1}{X} = \text{ſin.}\, X_{\prime}\, F_{\prime\prime}, \text{ d'où}$$

$$F_{\prime\prime} = \frac{\text{A. ſin.} = \left(\frac{\text{A. ſin. } 1}{X}\right)}{X_{\prime}}.$$

Soit X conſtant nous aurons

$$\phi = \text{ſin.}\, \phi X, \;\&\; \phi_{\prime} = \frac{\text{A. ſin. } \phi_{\prime}}{X};$$

ce qui eſt la même équation. Or ſi $X = \text{A. ſin.} = 1$, nous aurons $\phi = 1$, & $\phi_{\prime} = 1$; il faudra donc prendre dans les valeurs de ϕ & de $\phi_{\prime}$ en X celles qui deviennent 1 lorſque $X = \text{A. ſin.} = 1$.

Nous ne pouſſerons pas plus loin ces recherches, que nous préſentons aux Géomètres, non comme dignes de leur attention pour leur difficulté & leur utilité, mais par ce qu'elles ont pour objet un genre de fonctions dont les Géomètres ſe ſont très peu occupés, & dont la conſidération peut conduire quelque jour à la ſolution de problèmes très importans.

DE

DE

SERIE LAMBERTINA,

PLVRIMISQVE EIVS INSIGNIBVS PROPRIETATIBVS.

Auctore

L. EVLERO.

§. 1.

Hoc cognomine appellare liceat illam maxime memorabilem ſeriem, qua vir acutiſſimi ingenii *Lambertus* radices aequationum trinomialium primus exprimere docuit in Actorum Helueticorum Volum. III. Haec autem ſeries, ſi eius elementa parumper immutentur, ſequenti forma repraeſentari poteſt:

$$S = 1 + nv + \tfrac{1}{2}n(n+\alpha+\beta)v^2$$
$$+ \tfrac{1}{6}n(n+\alpha+2\beta)(n+2\alpha+\beta)v^3$$
$$+ \tfrac{1}{24}n(n+\alpha+3\beta)(n+2\alpha+2\beta)(n+3\alpha+\beta)v^4$$
$$+ \text{etc.}$$

cuius ſeriei ſumma S ita pendet a reſolutione huius aequationis trinomialis:

$$x^\alpha - x^\beta = (\alpha-\beta)v\,x^{\alpha+\beta}, \text{ vt ſit } S = x^n$$

vbi cum illa aequatio plures habere poſſit radices, pro x earum maximam vel minimam accipi oportet, prouti circumſtantiae poſtulauerint. Praeſenti autem forma hanc ſeriem exhibere eſt viſum, vt litterae α et β inter ſe permutabiles euaderent, ita vt, quicquid de altera fuerit obſeruatum, etiam de altera valeat.

§. 2. Praecipua igitur huius ſeriei proprietas in hoc conſiſtit, vt eius ſumma ſemper aequalis ſit poteſtati exponentis n, ad quem certa quaepiam quantitas eleuetur. Vnde ſi pro valore ipſius n quocunque $n = p$ ſumma ſeriei ponatur $= P$; pro alio autem valore quocunque $n = q$ ſumma ponatur $= Q$: tum, quia habebitur $P = x^p$ et $Q = x^q$, manifeſtum eſt fore $P^q = Q^p$, ſiue $lP : lQ = p : q$; ſicque, dummodo ſumma huius ſeriei pro vnico caſu exponentis n innotuerit, inde ſummae pro aliis quibuscunque valoribus ſemper aſſignari poterunt, ſiquidem reliquae quantitates α, β et v eosdem valores retineant. Plurimum igitur optandum foret, vt iſta inſignis proprietas ex ipſa ſeriei indole demonſtrari poſſet.

§. 3. Hic igitur ante omnia caſus notatu dignus occurrit, quo $n = 0$ et ſumma $S = 1$. Cum igitur ſit $S = x^n$, notum eſt caſu $n = 0$ formulam $\frac{x^n - 1}{n}$ abire in logarithmum hyperbolicum ipſius x, quamobrem hic caſus nobis iſtam ſummationem imprimis memoratu dignam ſuppeditat:

$lx =$

$$lx = v + \tfrac{1}{2}(\alpha + \beta) v^2 + \tfrac{1}{6}(\alpha + 2\beta)(2\alpha + \beta) v^3$$
$$+ \tfrac{1}{24}(\alpha + 3\beta)(2\alpha + 2\beta)(3\alpha + \beta) v^4$$
$$+ \tfrac{1}{120}(\alpha + 4\beta)(2\alpha + 3\beta)(3\alpha + 2\beta)(4\alpha + \beta) v^5$$
$$+ \text{etc.}$$

Quodſi ergo ſumma huius ſeriei iam fuerit explorata, vocetur que $= \Delta$, ob $lx = \Delta$ erit $x = e^{\Delta}$, denotante e numerum, cuius logarithmus hyperbolicus eſt $= 1$. Vnde cognito hoc valore Δ pro quocunque numero n ſumma ſeriei propoſitae erit $= e^{n\Delta}$; ex quo igitur aliam ſeriem infinitam exhibere licet, propoſitae aequalem, ſcilicet:

$$S = 1 + n\Delta + \tfrac{1}{2} n^2 \Delta^2 + \tfrac{1}{6} n^3 \Delta^3 + \tfrac{1}{24} n^4 \Delta^4 + \text{etc.}$$

tum vero, quia $\Delta = lx$, ſimul habebitur iſta aequatio:

$$e^{\alpha\Delta} - e^{\beta\Delta} = (\alpha - \beta)\, v\, e^{(\alpha+\beta)\Delta}, \text{ ſiue}$$
$$e^{-\beta\Delta} - e^{-\alpha\Delta} = (\alpha - \beta)\, v$$

ex qua aequatione etiam valorem ipſius Δ inueſtigare licebit.

§. 4. Praeterea vero etiam ſummationem ſeriei propoſitae generalis ita deſcribere licet, vt, ſi fuerit

$$v = \frac{x^{-\beta} - x^{-\alpha}}{\alpha - \beta},$$

ſeriei ſumma futura ſit $S = x^n$, atque adeo quicunque valores litteris α et β tribuantur, ſi modo notetur, vti iam obſeruauimus, quando ex pluribus valoribus pro x aſſumtis idem valor pro v reſultare poteſt, tum pro ſumma $S = x^n$ eum accipi oportere, qui fuerit vel maximus vel minimus. His in genere praenotatis percurramus aliquos caſus praecipuos, ratione litterarum α et β, quibus cognitio noſtrae ſeriei non mediocriter illuſtrabitur.

Ca-

Caſus I.

Quo $\beta = 0$.

§. 5. Quoniam litterae α et β ſunt permutabiles, perinde eſt, ſiue α ſiue β euaneſcat. Sit igitur $\beta = 0$ et noſtra ſeries ſequentem induet formam:

$$S = 1 + nv + \tfrac{1}{2}n(n+\alpha)v^2 + \tfrac{1}{6}n(n+\alpha)(n+2\alpha)v^3$$
$$+ \tfrac{1}{24}n(n+\alpha)(n+2\alpha)(n+3\alpha)v^4$$
$$+ \tfrac{1}{120}n(n+\alpha)(n+2\alpha)(n+3\alpha)(n+4\alpha)$$
$$+ \text{etc.}$$

cuius ergo ſumma erit $S = x^n$, ſi modo x capiatur ex hac aequatione: $x^\alpha - 1 = \alpha v x^\alpha$, ex qua prodit $x^\alpha = \frac{1}{1-\alpha v}$, ideoque $x = (1-\alpha v)^{-\frac{1}{\alpha}}$; quamobrem ſumma iſtius ſeriei erit $S = (1-\alpha v)^{-\frac{n}{\alpha}}$, quae more ſolito euoluta eandem prorſus ſeriem gignit. Quo ergo caſu ipſa ſeries Lambertina iam inſigne firmamentum accipit.

§. 6. Quodſi hic exponentem n euaneſcere faciamus, ſeries hoc modo ad logarithmum reuocabitur, vt ſit

$$lx = v + \tfrac{1}{2}\alpha v^2 + \tfrac{1}{3}\alpha\alpha v^3 + \tfrac{1}{4}\alpha^3 v^4 + \tfrac{1}{5}\alpha^4 v^5 + \text{etc.}$$

Cum igitur ſit

$$x = (1-\alpha v)^{-\frac{1}{\alpha}}, \text{ erit } lx = -\tfrac{1}{\alpha}l(1-\alpha v).$$

Notum autem eſt eſſe

$$l(1-\alpha v) = -\alpha v - \tfrac{1}{2}\alpha^2 v^2 - \tfrac{1}{3}\alpha^3 v^3 - \tfrac{1}{4}\alpha^4 v^4 - \text{etc.}$$

quae ſeries ducta in $-\frac{1}{\alpha}$ ipſam ſeriem modo inuentam reddit.

Ca-

Caſus II.

Quo $\beta = \alpha$.

§. 7. Hic caſus maxime eſt memoratu dignus, propterea quod aequatio, vnde valorem x deriuari oportet, ſit incongrua, ſcilicet: $x^\alpha - x^\alpha = o\, v\, x^{2\alpha}$, ſiue $o = o$; ad quod incommodum euitandum ponamus $\alpha = \beta + \omega$, exiſtente ω infinite paruo, et noſtra aequatio erit

$$x^{\beta+\omega} - x^\beta = \omega\, v\, x^{2\beta+\omega}, \text{ ſiue}$$

$$\frac{x^\omega - 1}{\omega} = v\, x^{\beta+\omega}.$$

Conſtat autem, euaneſcente ω eſſe $\frac{x^\omega - 1}{\omega} = l\, x$, ita vt hoc caſu fiat $l\, x = v\, x^{\beta+\omega} = v\, x^\alpha$, quae ergo eſt aequatio, ex qua valorem ipſius x elici oportet.

§. 8. Poſito autem $\beta = \alpha$ ad ſequentem ſeriem perueniemus:

$$S = 1 + n\, v + \tfrac{1}{2} n\, (n + 2\,\alpha)\, v^2 + \tfrac{1}{6} n\, (n + 3\,\alpha)^2\, v^3$$
$$+ \tfrac{1}{24} n\, (n + 4\,\alpha)^3\, v^4 + \tfrac{1}{120} n\, (n + 5\,\alpha)^4\, v^5$$
$$+ \tfrac{1}{720} n\, (n + 6\,\alpha)^5\, v^6 + \text{etc.}$$

quae ſeries ideo maxime eſt notatu digna, quod non ſolum exponentes continuo creſcant, ſed etiam ipſae quantitates eleuatae in progreſſione arithmetica procedant, cuiusmodi ſeries vix adhuc a Geometris ſunt conſideratae. Interim tamen hic nouimus, ſummam huius ſeriei eſſe $S = x^n$, ſi modo valor ipſius x huic aequationi conueniat, nempe: $l\, x = v\, x^\alpha$, quem autem valorem aliter niſi appropinquando cognoſcere non datur.

§. 9. Quodſi vlterius ſtatuamus $n = 0$, ex ſupra allatis ſequens ſeries colligitur:

$$l x = v + \alpha v^2 + \frac{3^2}{6} \alpha \alpha v^3 + \frac{4^3}{24} \alpha^3 v^4 + \frac{5^4}{120} \alpha^4 v^5 + \frac{6^5}{720} \alpha^5 v^6 + \text{etc.}$$

Cum igitur ſit $l x = v x^\alpha$, erit

$$x^\alpha = 1 + \frac{2^1}{1.2} \alpha v + \frac{3^2}{1.2.3} \alpha^2 v^2 + \frac{4^3}{1.2.3.4} \alpha^3 v^3 + \frac{5^4}{1.2...5} \alpha^4 v^4 + \frac{6^5}{1.....6} \alpha^5 v^5 + \text{etc.}$$

Ponamus hic $\alpha v = u$, ita vt $\alpha l x = u x^\alpha$. Sit iam porro $x^\alpha = y$, ideoque $\alpha l x = l y$, conſequenter aequatio noſtra fiet $l y = u y$, quocirca nanciſcimur hanc ſummationem:

$$y = 1 + \frac{2^1}{1.2} u + \frac{3^2}{1.2.3} u u + \frac{4^3}{1.2.3.4} u^3 + \frac{5^4}{1.....5} u^4 + \frac{6^5}{1.....6} u^5 + \text{etc.}$$

ſi modo fuerit $u = \frac{l y}{y}$.

§. 10. Quoniam in hac ſerie exponentes numeratorum ab ipſis numeratoribus vnitate deficiunt, eos ſequenti modo ad paritatem reducamus. Multiplicemus vtrinque per u ac differentiemus, fietque

$$\frac{d.l y}{d u} = \frac{d y}{y d u} = 1 + \frac{2^2}{1.2} u + \frac{3^3}{1.2.3} u u + \frac{4^4}{1.2.3.4} u^3 + \frac{5^5}{1...5} u^4 + \frac{6^6}{1...6} u^5 + \text{etc.}$$

Cum autem ſit $l y = u y$, erit $\frac{d y}{y} = u d y + y d u$, vnde fit $\frac{d y}{d u} = \frac{y y}{1 - u y}$; ſicque ſumma illa erit $= \frac{y}{1 - u y}$. Multiplicemus porro vtrinque per u, et ob $u y = l y$ adipiſcemur hanc ſummationem maxime notabilem:

$$\frac{l y}{1 - l y} = u + \frac{2^2}{1.2} u^2 + \frac{3^3}{1.2.3} u^3 + \frac{4^4}{1...4} u^4 + \frac{5^5}{1...5} u^5 + \text{etc.}$$

ſi modo fuerit $u = \frac{l y}{y}$.

§. 11. Haec poſtrema ſeries ob concinnitatem vtique meretur, vt in eius indolem accuratius inquiramus. Ac primo quidem patet, ſi ſumeremus $u = 1$ vel $u > 1$, ſeriem prodituram eſſe diuergentem; cum in forma generali $\frac{n^n}{1.2\ldots n}$ numerator continuo magis denominatorem ſuperet, ideoque omnes termini adeo in infinitum excreſcant, quod ſignum eſt ſummae imaginariae; id quod per formulam $u = \frac{ly}{y}$ manifeſto declaratur, ſiquidem nullius numeri logarithmus ipſo maior euadere poteſt. Quando autem u vnitate minus accipitur, ſumma iſtius ſeriei vtique finita prodire poteſt, quoties ſcilicet formula $\frac{ly}{y}$ finitum accipit valorem, id quod euenit, quando $ly < 1$, ſiue $y < e$. Sumto autem $y = e$, vnde fit $u = \frac{1}{e}$, ſeries noſtra etiamnunc ſummam infinitam habebit, etiamſi eius termini continuo decreſcant, atque adeo tandem euaneſcant.

§. 12. In hac autem ſerie imprimis memorabile occurrit, quod, ſi u tantillo ſuperet $\frac{1}{e}$, terminos tandem in infinitum excreſcant, id quod egregie conuenit cum iis, quae olim circa valorem producti $1.2.3\ldots\ldots n$ obſeruaui in calculo differentiali pag. 466. Quodſi enim ponatur $T = \frac{n^n}{1.2\ldots n}$, vt ſit

$$lF = nln - l1 - l2 - l3 \ldots\ldots - ln$$

loco citato demonſtraui eſſe $l1 + l2 + l3 + l4 + \ldots + ln$

$$= \frac{1}{2}l2\pi + (n + \frac{1}{2})ln - n + \frac{1}{12n} - \frac{1}{360n^3} + \frac{1}{1260n^5} - \text{etc.}$$

vnde ſequitur ipſum productum

$$1.2.3\ldots\ldots n = \frac{\sqrt{2\pi} \times n^{n+\frac{1}{2}} \times e^{\frac{1}{12n} - \frac{1}{360n^3}\ \text{etc.}}}{e^n}$$

ſicque habebimus

$$T = \frac{1}{\sqrt{2 n \pi}} \cdot e^{n - \frac{1}{12 n} + \frac{1}{360 n^3} - \text{etc.}}$$

Quando ergo n eſt numerus praemagnus, totus ſeriei noſtrae terminus erit $T u^n = \frac{e^n u^n}{\sqrt{2 n \pi}}$, ex qua forma manifeſtum eſt, ſimulac fuerit $e u > 1$, ſiue $u > \frac{1}{e}$, tum hunc terminum euadere infinitum; ſin autem fuerit $e u$ vel $= 1$ vel adeo < 1, ſiue $u < \frac{1}{e}$, tum iſtum terminum in nihilum eſſe abiturum.

§. 13. Illuſtremus hanc ſummationem vnico exemplo, ponentes $l y = \frac{1}{2}$, vt ſumma ſeriei euadat $= 1$; tum autem erit $u = \frac{1}{2 \sqrt{e}}$, quo ergo caſu certi ſumus fore

$$1 = u + \frac{2^2}{1 \cdot 2} u^2 + \frac{3^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} u^3 + \frac{4^4}{1 \ldots 4} u^4 + \text{etc.}$$

Cum autem ſit $e = 2,71828$, valores priorum huius ſeriei terminorum in fractionibus decimalibus ita reperientur expreſſi:

$$u = 0,303269$$
$$2 u^2 = 0,183944$$
$$\frac{9}{2} u^3 = 0,125515$$
$$\frac{32}{3} u^4 = 0,090228$$
$$\frac{5^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} u^5 = 0,066805$$
$$\frac{3^2 \cdot 6^2}{5} u^6 = 0,050413$$

Haec ergo ſeries perquam lente conuergit, ita tamen, vt tota ſumma non vltra vnitatem aſcendere ſit cenſenda.

De

De reſolutione
aequationis $lx = vx^\alpha$.

§. 14. Quoniam pro caſu ſecundo, vbi $\beta = \alpha$, ſummatio noſtrae ſeriei pendet ab aequatione $lx = vx^\alpha$, ex qua, pro quouis valore v, quantitatem x erui oportet: ante omnia obſeruari conuenit, cuilibet valori v geminos valores ipſius x reſpondere poſſe. Ad hoc oſtendendum faciamus $x^\alpha = y$ et $\alpha v = u$, vt habeatur iſta aequatio: $ly = uy$, ſiue $u = \frac{ly}{y}$; vndet patet numerum u poſitiuum eſſe non poſſe, niſi ſit $y > 1$. Tum autem ſemper erit $u < \frac{1}{e}$, propterea quod maximus valor formulae $\frac{ly}{y}$ oritur ſumto $y = e$, ita vt, ſiue y maius capiatur quam e ſiue minus, ſemper prodeat $u < \frac{1}{e}$. Hinc igitur patet, ſeriem pro caſu ſecundo inuentam finitam ſummam habere non poſſe, quamdiu fuerit $u > \frac{1}{e}$, ſiue $v > \frac{1}{\alpha e}$, ſiquidem v fuerit quantitas poſitiua; quando enim foret negatiua, ob ſigna alternantia ſumma ſemper futura eſſet finita.

§. 15. Hinc ſequitur porro, quoties fuerit $u < \frac{1}{e}$, toties duos valores pro y exhiberi poſſe: alterum ſcilicet maiorem quam e, alterum vero minorem, ex quorum vtroque prodeat idem valor $u = \frac{ly}{y}$. Veluti, ſiue ſtatuatur $y = 2$, ſiue $y = 4$, vtrinque prodit $u = \frac{l2}{2}$. Idem vſu venit, ſiue ſtatuatur $y = (\frac{3}{2})^3 = \frac{27}{8}$, ſiue $y = (\frac{3}{2})^2 = \frac{9}{4}$, ſiquidem ex vtroque prodit $u = \frac{8}{9} l \frac{3}{2}$. Idem porro euenit, ſiue ſumatur $y = (\frac{4}{3})^4$, ſiue $y = (\frac{4}{3})^3$, quandoquidem ex vtroque fit $u = \frac{3^4}{4^3} l \frac{4}{3}$.

§. 16. Ad tales binos ipſius y valores inueniendos ſint p et q huiusmodi valores, quibus euadat $u = \frac{lp}{p} = \frac{lq}{q}$.

Ponamus nunc $q = p\,r$, fierique oportet

$$\frac{lp}{p} = \frac{lpr}{pr} = \frac{lp + lr}{pr},$$

ſiue $r\,lp = lp + l\,r$, vnde fit $lp = \frac{lr}{r - 1}$, ideoque $p = r^{\frac{1}{r-1}}$, hincque $q = r^{\frac{r}{r-1}}$, quae formulae quo commodiores reddantur, faciamus $\frac{1}{r - 1}, = m$, vt ſit $r = \frac{m+1}{m}$, vnde bini valores ipſius y, quos vocauimus p et q, nunc erunt: alter $y = p = (\frac{m+1}{m})^m$, alter vero $y = q = (\frac{m+1}{m})^{m+1}$; ex vtroque enim prodit $u = \frac{m^{m+1}}{(m+1)^m}\; l\frac{m+1}{m}$.

§. 16. His expoſitis hic quaeſtio oritur maximi momenti: vter horum duorum valorum ipſius y adhiberi debeat ad ſummam huius ſeriei exprimendam:

$$y = 1 + \frac{2^1}{1.2}\,u + \frac{3^2}{1.2.3}\,u\,u + \frac{4^3}{1.2.3.4}\,u^3 + \frac{5^4}{1.2...5}\,u^4 + \text{etc.}$$

ad quam quaeſtionem dirimendam ſumamus primo $u = \frac{1}{e}$, vt vterque valor ipſius y ſit $= e$; nullum enim eſt dubium quin hoc caſu ſit $y = e$. Nunc vero, ſi fuerit $u < \frac{1}{e}$, euidens eſt ſummam ſeriei euadere minorem quam e. Quare cum pro y inuenerimus duos valores, alterum maiorem, alterum quidem minorem quam e, manifeſtum eſt, ſemper valorem minorem accipi debere ad ſummam illius ſeriei exprimendam. Ita ſi fuerit $u = \frac{m^{m+1}}{(m+1)^m}\; l\frac{m+1}{m}$, valor pro y aſſumendus erit $y = (\frac{m+1}{m})^m$, quippe qui ſemper minor eſt quam e, dum alter, $y = (\frac{m+1}{m})^{m+1}$, maior eſt quam e

Theo-

Theorema.

§. 17. Si quantitates x et v ita a ſe inuicem pendeant, vt ſit $l\,x = v\,x$, atque adeo cuilibet valori v gemini valores x reſpondeant, alter maior quam e, alter vero minor, tum in ſequentibus ſummationibus:

$$\text{I.}\quad \frac{x^n - 1}{n} = v + \frac{n+2}{1.2}v^2 + \frac{(n+3)^2}{1.2.3}v^3 + \frac{(n+4)^3}{1.2.3.4}v^4 + \text{etc.}$$

$$\text{II.}\quad \frac{x^n}{1 - l\,x} = 1 + \frac{n+1}{1}.\,v + \frac{(n+2)^2}{1.2}v^2 + \frac{(n+3)^3}{1.2.3}v^3 + \frac{(n+4)^4}{1.2.3.4}v^4 + \text{etc.}$$

perpetuo loco x minorem valorem accipi oportet, qui ſcilicet ſit minor quam e. Ratio harum duarum ſerierum ex euolutione caſus ſecundi per ſe eſt manifeſta: prior enim naſcitur ex §. 8. ſumendo $\alpha = 1$.

§. 18. Poſterior vero ſeries ex priore deducitur per differentiationem; hinc enim per dv diuidendo et differentiando adipiſcimur

$$\frac{x^{n-1}\,d\,x}{d\,v} = 1 + \frac{n+2}{1}v + \frac{(n+3)^2}{1.2}v^2 + \frac{(n+4)^3}{1.2.3}v^3 + \text{etc.}$$

Cum autem ſit $v = \frac{l\,x}{x}$, erit $d\,v = \frac{d\,x}{x\,x}(1 - l\,x)$, ideoque

$$\frac{x^{n-1}\,d\,x}{d\,v} = \frac{x^{n+1}}{1 - l\,x}.$$

Quare ſi hic loco n ſcribamus $n - 1$, orietur iſta ſummatio:

$$\frac{x^n}{1 - l\,x} = 1 + \frac{n+1}{1}v + \frac{(n+2)^2}{1.2}v^2 + \frac{(n+3)^3}{1.2.3}v^3 + \text{etc.}$$

quae eſt ipſa ſeries noſtra poſterior.

§. 19.

§. 19. Hae duae autem ſeries eo magis omni attentione dignae ſunt cenſendae, quod multo ſint ſimpliciores et concinniores, quam ipſa ſeries generalis *Lambertina*; tum vero imprimis, quod nulla plane via patere videatur ad earum veritatem directe demonſtrandam. Quanquam enim veritas ipſius ſeriei *Lambertinae* iam ſatis eſt euicta: tamen rationes, quibus demonſtratio illa innititur, ad caſum praeſentium ſerierum nullo modo accommodari poſſunt, in quo vtique inſigne paradoxon conſpicitur, quod propoſitionem quandam generalem demonſtratione munire liceat, quae tamen ad quempiam caſum ſpecialem applicari penitus nequeat.

§. 20. Quemadmodum autem ſeries generalis *Lambertina* ex aequatione trinomiali

$$x^{\alpha} - x^{\beta} = (\alpha - \beta) v x^{\alpha + \beta},$$

deriuari queat, alia occaſione fuſius monſtraui, vbi ſimul ſimilem reſolutionem ad aequationes quantumuis polynomias extendi. At vero quomodo viciſſim ſeries *Lambertina* ad aequationem trinomialem perduci queat, quaeſtio multo magis ardua videtur; vnde operae pretium erit talem analyſin expoſuiſſe, quod opus quo facilius ſuccedat, ſequens problema praemittam.

Problema.

Propoſita ſerie *Lambertina*, vti initio eſt euoluta, eius conſenſum cum hac aequatione trinomiali:

$$x^{\alpha} - x^{\beta} = (\alpha - \beta) v x^{\alpha + \beta}$$

docere.

Solutio.

Solutio.

§. 21. Poſita ſeriei illius ſumma $= S$, hic quidem aſſumo iſtam ſummam aequari huiusmodi poteſtati, x^n, ita vt tantum nobis incumbat relationem inter iſtam quantitatem x et quantitates ipſam ſeriem conſtituentes, quae ſunt α, β et v inueſtigare. Facile autem intelligitur, hanc ob rationem neutiquam pro demonſtratione haberi poſſe, (propterea quod hoc ipſum ante omnia demonſtrandum fuiſſet), iſtam ſummam S per talem formam x^n exhiberi poſſe. Hoc autem conceſſo ratiocinium ſequenti modo inſtituamus.

§. 22. Poſito ſcilicet $S = x^n$ primo loco exponentis indefiniti n ſtatuo valorem determinatum $n = -\alpha$, indeque iſta ſeries obtinebitur:

$$x^{-\alpha} = 1 - \alpha v - \tfrac{1}{2}\alpha\beta v^2 - \tfrac{1}{6}\alpha . 2\beta(\alpha+\beta)v^3 \\ - \tfrac{1}{24}\alpha . 3\beta(\alpha+2\beta)(2\alpha+\beta)v^4 \\ - \tfrac{1}{120}\alpha . 4\beta(\alpha+3\beta)(2\alpha+2\beta)(3\alpha+\beta)v^5 - \text{etc.}$$

Simili modo, ſi ſtatuamus $n = -\beta$, ad ſequentem ſeriem pertingemus:

$$x^{-\beta} = 1 - \beta v - \tfrac{1}{2}\beta\alpha v^2 - \tfrac{1}{6}\beta . 2\alpha(\beta+\alpha)v^3 \\ - \tfrac{1}{24}\beta . 3\alpha(\beta+2\alpha)(2\beta+\alpha)v^4 \\ - \tfrac{1}{120}\beta . 4\alpha(\beta+3\alpha)(2\beta+2\alpha)(3\beta+\alpha)v^5 - \text{etc.}$$

§. 23. Iam priorem harum duarum ſerierum a poſteriore ſubtrahamus, atque impetrabimus iſtam aequalitatem: $x^{-\beta} - x^{-\alpha} = (\alpha - \beta)v$, propterea quod praeter terminos ſecundos omnes ſequentes ſe manifeſto deſtruunt. Quodſi iam iſtam aequationem inuentam per $x^{\alpha+\beta}$ mul-

tiplicemus, prodibit ipſa aequatio trinomialis aſſumta

$$x^\alpha - x^\beta = (\alpha - \beta) v x^{\alpha + \beta}.$$

§. 24. Dummodo igitur demonſtrari poſſet, ſummam ſeriei *Lambertinae* aequari poteſtati exponentis n cuiuspiam quantitatis x, quae ab n non pendeat, praecedens Analyſis firmam vtique demonſtrationem ſuppeditaret. Hunc autem defectum in ſequente problemate ſupplere conabimur.

Problema principale.

Operationes analiticas exponere, quae ad cognitionem verae ſummae ſeriei *Lambertinae* manuducant.

Solutio.

§. 25. Cum ſeries propoſita *Lambertina* quatuor quantitates α, β, v et n inuoluat, ternas priores α, β et v tanquam datas et conſtantes ſpectemus, dum quarta n quaſi variabilis conſideretur; hocque modo ſummam quaeſitam S tanquam certam functionem quantitatis n contemplari licebit, quam more recepto hoc modo repraeſentemus: $S = \Phi : n$, ita vt ſit

$$\begin{aligned}\Phi : n = 1 + n v + \tfrac{1}{2} n (n + \alpha + \beta) v^2 \\ + \tfrac{1}{6} n (n + \alpha + 2 \beta) (n + 2 \alpha + \beta) v^3 \\ + \tfrac{1}{24} n (n + \alpha + 3 \beta) (n + 2 \alpha + 2 \beta) (n + 3 \alpha + \beta) v^4 \\ + \tfrac{1}{120} n (n + \alpha + 4 \beta) (n + 2 \alpha + 3 \beta) (n + 3 \alpha + 2 \beta) \times \\ \times (n + 4 \alpha + \beta) v^5 + \text{etc.}\end{aligned}$$

§. 26. Cum igitur haec aequatio vera eſſe debeat, quicunque numeri loco n ſcribantur, loco n ſtatuamus

mus primo $n-\alpha$ et impetrabimus

$$\begin{aligned}\Phi:(n-\alpha) = {} & 1+(n-\alpha)v+\tfrac{1}{2}(n-\alpha)(n+\beta)v^2 \\ & +\tfrac{1}{6}(n-\alpha)(n+2\beta)(n+\alpha+\beta)v^3 \\ & +\tfrac{1}{24}(n-\alpha)(n+3\beta)(n+\alpha+2\beta)(n+2\alpha+\beta)v^4 \\ & +\tfrac{1}{120}(n-\alpha)(n+4\beta)(n+\alpha+3\beta)\times \\ & \times(n+2\alpha+2\beta)(n+3\alpha+\beta)v^5+\text{etc.}\end{aligned}$$

Simili vero modo reperiemus fore

$$\begin{aligned}\Phi:(n-\beta) = {} & 1+(n-\beta)v+\tfrac{1}{2}(n-\beta)(n+\alpha)v^2 \\ & +\tfrac{1}{6}(n-\beta)(n+2\alpha)(n+\alpha+\beta)v^3 \\ & +\tfrac{1}{24}(n-\beta)(n+3\alpha)(n+\alpha+2\beta)(n+2\alpha+\beta)v^4 \\ & +\tfrac{1}{120}(n-\beta)(n+4\alpha)(n+\alpha+3\beta)(n+2\alpha+2\beta) \\ & \times(n+3\alpha+\beta)v^5+\text{etc.}\end{aligned}$$

§. 27. Subtrahamus nunc priorem harum duarum ſerierum a poſteriore, et cum pro terminis cuiuscunque ordinis, praetermiſſis factoribus communibus, habeamus

$$(n-\beta)(n+\lambda\alpha)-(n-\alpha)(n+\lambda\beta)=(\lambda+1)n(\alpha-\beta),$$

hoc obſeruato, ſubtractione facta inueniemus

$$\begin{aligned}\Phi:(n-\beta)-\Phi:n-\alpha) & \\ =(\alpha-\beta)v & +\tfrac{2}{2}(\alpha-\beta)nv^2+\tfrac{3}{6}(\alpha-\beta)n(n+\alpha+\beta)v^3 \\ & +\tfrac{4}{24}(\alpha-\beta)n(n+\alpha+2\beta)(n+2\alpha+\beta)v^4 \\ & +\tfrac{5}{120}(\alpha-\beta)n(n+\alpha+3\beta)(n+2\alpha+2\beta) \\ & \times(n+3\alpha+\beta)v^5\ \text{etc.}\end{aligned}$$

§. 28. Quia in hac ſerie omnes termini factorem continent $(\alpha-\beta)v$, per hunc diuidendo conſequimur hanc aequationem:

$$\frac{\Phi:(n-\beta)-\Phi:(n-\alpha)}{(\alpha-\beta)v} = 1 + nv + \tfrac{1}{2}n(n+\alpha+\beta)v^2$$
$$+ \tfrac{1}{6}n(n+\alpha+2\beta)(n+2\alpha+\beta)v^3$$
$$+ \tfrac{1}{24}n(n+\alpha+3\beta)(n+2\alpha+2\beta)$$
$$\times(n+3\alpha+\beta)v^4 + \text{etc.}$$

quae ſeries cum ſit ea ipſa, quam charactere $\Phi:n$ inſigniuimus, pro ſumma eruenda hanc adepti ſumus aequationem:

$$\Phi:(n-\beta)-\Phi:(n-\alpha) = (\alpha-\beta)\,v\,\Phi:n.$$

§. 29. Totum negotium igitur ad hanc quaeſtionem eſt perductum: cuiusmodi functionem ipſius n pro $\Phi:n$ accipi oporteat, vt huic aequationi ſatisfiat? Leuiter autem eam inſpicienti mox patebit, ei tali poſitione ſatisfieri poſſe: $\Phi:n = A\,k^n$, vbi quidem neque A neque k litteram n inuoluat; tum autem erit

$$\Phi:(n-\alpha) = A\,k^{n-\alpha} \text{ et } \Phi:(n-\beta) = A\,k^{n-\beta}.$$

Subſtitutis autem his valoribus aequatio inuenta iſtam induet formam:

$$A\,(k^{n-\beta}-k^{n-\alpha}) = (\alpha-\beta)\,v\,A\,k^n$$

quae diuiſa per $A\,k^n$ abit in hanc: $k^{-\beta}-k^{-\alpha} = (\alpha-\beta)\,v$, quam ſi ducamus in $k^{\alpha+\beta}$ et loco n ſcribamus x, deducimur ad ipſam aequationem trinomialem initio commemoratam: $x^\alpha - x^\beta = (\alpha-\beta)\,v\,x^{\alpha+\beta}$.

§. 30. Sic igitur ſolidiſſime eſt euictum, ſummam ſeriei *Lambertinae* neceſſario tali formula exprimi, nempe $S = A\,k^n$, ſiue $S = A\,x^n$, vbi cum poſito $n = 0$ ſumma ſeriei fieri debeat $= 1$, manifeſtum eſt litteram A neceſſario fieri $= 1$, ita vt ſumma iſtius ſeriei prorſus ſit vti

eſt

eſt aſſignata: ſcilicet $S = x^n$, ſiquidem quantitas x iſta aequatione eliciatur: $x^\alpha - x^\beta = (\alpha - \beta) v x^{\alpha+\beta}$.

§. 31. Contra hanc ſolutionem obiici poſſet, aequationi inuentae

$$\Phi : (n - \beta) - \Phi : (n - \alpha) = (\alpha - \beta) v \Phi : n$$

fortaſſe adhuc aliis modis ſatisfieri poſſe, praeter valorem $\Phi : n = A k^n$, quod quidem negari nequit, cum huiusmodi aequationes plerumque plures admittere ſoleant ſolutiones. Verum, etiamſi ſufficere queat iſtum valorem prorſus ſatisfacere, atque adeo ita, vt neque A neque k ab n pendeat: tamen idem ex principiis Analyſeos infinitorum etiam ſequenti modo confirmari poteſt.

§. 32. Cum $S = \Phi : n$ ſit functio ipſius n, hac quantitate variabili aſſumta, ex notis principiis conſtat fore

$$\Phi : (n - \alpha) = S - \frac{\alpha\, dS}{dn} + \frac{\alpha^2\, ddS}{2\, dn^2} - \frac{\alpha^3\, d^3S}{1.2.3.\, dn^3} + \frac{\alpha^4\, d^4S}{1.2.3.4\, dn^4} - \text{etc.}$$

ſimilique modo

$$\Phi : (n - \beta) = S - \frac{\beta\, dS}{dn} + \frac{\beta^2\, ddS}{1.2.\, dn^2} - \frac{\beta^3\, d^3S}{1.2.3.\, dn^3} + \frac{\beta^4\, d^4S}{1.2.3.4.\, dn^4} - \text{etc.}$$

his ſubſtitutis perueniemus ad iſtam aequationem differentialem infinitam:

$$(\alpha - \beta) v S = (\alpha - \beta) \frac{dS}{dn} - (\alpha\alpha - \beta\beta) \frac{ddS}{1.2.\, dn^2}$$
$$+ (\alpha^3 - \beta^3) \frac{d^3S}{1.2.3.\, dn^3} - (\alpha^4 - \beta^4) \frac{d^4S}{1.2.3.4.\, dn^4} + \text{etc.}$$

ex qua quantitatem S erui oportet.

§. 33. Cum autem in ſingulis huius aequationis terminis variabilis S vnicam vbique dimenſionem occupet,

 in

in calculo integrali autem oſtenſum ſit, tali aequationi aliter ſatisfieri non poſſe, niſi huiusmodi valoribus: $S = C e^{\lambda n}$: hoc euicto, ſi ſtatuamus $e^\lambda = k$, fiet $S = C k^n$, prorſus vti ante aſſumſeramus, ita vt iam nihil amplius ſuper ſerie *Lambertina* deſiderari poſſe videatur.

Vberior confirmatio Solutionis datae.

§. 34. Si ad ſolam conditionem inuentam reſpiciamus, qua eſſe debet

$$\phi : (n - \beta) - \phi : (n - \alpha) = (\alpha - \beta) v \phi : n,$$

ei vtique modo multo generaliori ſatisfieri poteſt. Quodſi enim ſingulae litterae p, q, r, s etc. fuerint radices aequationis huius: $x^{-\beta} - x^{-\alpha} = (\alpha - \beta) v$, manifeſtum eſt iſtum valorem:

$$\phi : n = A p^n + B q^n + C r^n + D s^n + \text{etc.}$$

eidem conditioni ſatisfacere. In hac igitur formula certo continebitur valor ſummae S ſeriei *Lambertinae*, quae cum ſit determinata et a ſolis quantitatibus α, β, n et v pendeat, quaeritur, quomodo litteras illas indefinitas A, B, C, D etc. determinari oporteat, vt fiat $S = \phi : n$.

§. 35. Hic autem ſtatim duo caſus ſe offerunt, prouti vel vnica radicum ſummam S definit, vel omnes plane radices ad eam definiendam concurrunt, quos ergo ambos caſus ſollicite perpendi conueniet. Vbi primum obſeruo, ſi omnibus radicibus p, q, r, s etc. ſimul fuerit vtendum, eas ſine dubio pari ratione ingredi debere, cum nulla ſit ratio, cur cuipiam earum vlla praerogatiua tribuere-

bueretur: Forent idcirco coefficientes illi A, B, C, D etc. inter ſe aequales, ideoque

$$S = A(p^n + q^n + r^n + s^n + \text{etc.});$$

quare cum caſu $n = 0$ fieri debeat $S = 1$, ſi numerus radicum ſtatuatur $= i$, hoc caſu fit $S = A\,i$, ergo $A = \frac{1}{i}$.

§. 36. Praeterea autem noſtra ſeries ita eſt comparata, vt ſumto $v = 0$ etiam prodeat eius ſumma $S = 1$. Iam vero caſu $v = 0$ noſtra aequatio erit $x^{-\beta} - x^{-\alpha} = 0$, ſiue $x^{\alpha-\beta} - 1 = 0$, cuius vna radix ſemper eſt $= 1$, et ſumma omnium radicum ſemper eſt $= 0$, ſolo caſu excepto, quo $\alpha - \beta = 1$. Quodſi ergo ſumatur $n = 1$, prodiret $S = \frac{1}{i}(p + q + r + s + \text{etc.}) = 0$, cum tamen ſumma ſit $= 1$, ita vt iſta hypotheſis veritati aduerſetur.

§. 37. Idem incommodum etiam multo clarius elucefcet, ſi in genere ſtatuamus $n = 1$, quippe quo caſu foret $S = \frac{1}{i}(p + q + r + s + \text{etc.})$, vbi $p + q + r + s + \text{etc.}$ eſt ſumma radicum aequationis trinomialis

$$x^{-\beta} - x^{-\alpha} = (\alpha - \beta)\,v$$

ideoque aequabitur coëfficienti ſecundi termini, poſtquam aequatio in ordinem fuerit redacta, qui cum plerumque deficiat, ſumma ſeriei etiam nihilo foret aequalis; quod cum veritati contradicat, ſatis euictum eſt, non omnes radices aequationis trinomialis ad ſummam S conſtituendam concurrere poſſe.

§. 38. Hoc igitur caſu remoto, quo omnes radices aequaliter ingrederentur, relinquitur caſus prior, quo ſumma S per vnicam iſtarum radicum determinatur, quemadmo-

admodum in ſolutione aſſumſimus. Euidens autem eſt iſtam radicem fore vel maximam vel minimam: hic ſcilicet idem diſcrimen vſu venit, atque in reſolutione omnium aequationum per ſeries recurrentes, qua methodo pariter tantum vna aequationum radix vel maxima vel minima inueniri ſolet, ſicque ſolutio noſtra data iam extra omne dubium eſt collocata. Occaſione autem methodi, qua ſumus vſi, ſequens problema adiunxiſſe non pigebit.

Problema.

Inuenire omnes functiones quantitatis variabilis n, quibus huic conditioni generali ſatisfiat:

$$\Phi : n = a\Phi : (n+\alpha) + b\Phi : (n+\beta) + c\Phi : (n+\gamma) + \text{etc.}$$

Solutio.

§. 39. Quodſi ratiocinium vti in praecedenti problemate inſtituamus, facile patebit, iſti conditioni ſatisfieri poſſe, ſtatuendo $\Phi \cdot n = A\,k^n$, ita vt A et k ſint quantitates conſtantes. Facta autem hac ſubſtitutione prodibit haec aequatio:

$$A k^n = A\,a k^{n+\alpha} + A\,b\,k^{n+\beta} + A\,c\,k^{n+\gamma} + A\,d\,k^{n+\delta} + \text{etc.}$$

quae per A k^n diuiſa praebet

$$1 = a\,k^\alpha + b\,k^\beta + c\,k^\gamma + d\,k^\delta \text{ etc.}$$

ita vt k deſignet quampiam radicem huius aequationis, cuius adeo ſingulae radices conditioni praeſcriptae pariter ſatisfacient. Quin etiam omnes has diuerſas ſolutiones quomodocunque inter ſe combinare licebit. Ita ſi p, q, r, s etc. fuerint radices iſtius aequationis, problemati noſtro gene-

generaliter ſatisfiet, ſtatuendo

$$\Phi : n = A p^n + B q^n + C r^n + \text{etc.}$$

vbi litterae A, B, C, D etc. penitus arbitrio noſtro relinquuntur; haecque eſt ſolutio generalis problematis illius analytici, quod frequenter inſignem vſum afferre poterit.

§. 40. Sed reuertamur ad ſeriem *Lambertinam* atque oſtendamus, quomodo ex ea innumerabiles aliae ſeries affines deriuari queant.

Problema.

Propoſita ſerie *Lambertina*, quam breuitatis gratia ſub hac forma referamus:

$$S = 1 + A v + B v^2 + C v^3 + D v^4 + \text{etc.}$$

cuius nouimus eſſe ſummam $= x^n$, ſumendo pro x ſiue maximam ſiue minimam radicem huius aequationis trinomiae: $x^\alpha - x^\beta = (\alpha - \beta) v\, x^{\alpha + \beta}$, inde innumerabiles alias ſeries affines formare, quarum ſummam pariter aſſignare liceat.

Solutio.

§. 31. Hic igitur litteris A, B, C, D etc. breuitatis gratia ſequentes valores tribuimus:

$$A = n;\ B = \tfrac{1}{2} n (n + \alpha + \beta);\ C = \tfrac{1}{6} n (n + \alpha + 2\beta)(n + 2\alpha + \beta);$$
$$D = \tfrac{1}{24} n (n + \alpha + 3\beta)(n + 2\alpha + 2\beta)(n + 3\alpha + \beta);$$
$$E = \tfrac{1}{120} n (n + \alpha + 4\beta)(n + 2\alpha + 3\beta)(n + 3\alpha + 2\beta)(n + 4\alpha + \beta)$$
$$\text{etc.} \qquad \text{etc.}$$

His igitur valoribus notatis duae potiſſimum viae patent ad alias ſeries inde deriuandas: altera ſcilicet per differentiationem, altera vero per integrationem inſtitui poteſt.

§. 42. Cum ſit $(\alpha-\beta)\,v = x^{-\beta} - x^{-\alpha}$ erit

$$(\alpha-\beta)\,dv = -\beta x^{-\beta-1}\,dx + \alpha x^{-\alpha-1}\,dx$$

ſiue

$$(\alpha-\beta)\,dv = \frac{dx\,(\alpha x^{\beta} - \beta x^{\alpha})}{x^{\alpha+\beta+1}};$$

hinc ergo ſi noſtram ſeriem differentiemus, ac per dv diuidamus, ad ſequentem perueniemus ſummationem:

$$\frac{(\alpha-\beta)\,n\,x^{n+\alpha+\beta}}{\alpha x^{\beta} - \beta x^{\alpha}} = A + 2Bv + 3Cvv$$
$$+ 4Dv^3 + 5Ev^4 + 6Fv^5 \text{ etc.}$$

§. 43. Potuiſſemus etiam ſeriem propoſitam per quampiam poteſtatem ipſius v ante multiplicare, quam differentiatio inſtituatur; veluti multiplicando per v^{λ}, vt habeamus

$$v^{\lambda}x^{n} = v^{\lambda} + Av^{\lambda+1} + Bv^{\lambda+2} + Cv^{\lambda+3} + Dv^{\lambda+4} + \text{etc.}$$

haec ſeries differentiata ac per dv diuiſa praebet

$$\lambda v^{\lambda-1}x^{n} + n v^{\lambda} x^{n-1}.\tfrac{dx}{dv} = \lambda v^{\lambda-1} + (\lambda+1)Av^{\lambda}$$
$$+ (\lambda+2)Bv^{\lambda+1} + (\lambda+3)Cv^{\lambda+2}$$
$$+ (\lambda+4)Dv^{\lambda+3} + (\lambda+5)Ev^{\lambda+4} + \text{etc.}$$

quae expreſſio per $v^{\lambda-1}$ diuiſa praebet hanc ſummationem:

$$\lambda x^{n} + n v x^{n-1}\tfrac{dx}{dv} = \lambda + (\lambda+1)Av$$
$$+ (\lambda+2)Bv^2 + (\lambda+3)Cv^3 + (\lambda+4)Dv^4 + \text{etc.}$$

pro qua modo vidimus eſſe

$$\frac{n x^{n-1}\,dx}{dv} = \frac{(\alpha-\beta)\,n\,x^{\lambda+\alpha+\beta}}{\alpha x^{\beta} - \beta x^{\alpha}},$$

quo

quo valore ſubſtituto iſta ſumma euadet

$$= \lambda x^n + \frac{n x^{n+\alpha} - n x^{n+\beta}}{\alpha x^\beta - \beta x^\alpha}$$

$$= \frac{x^n}{\alpha x^\beta - \beta x^\alpha} ((\lambda \alpha - n) x^\beta - (\lambda \beta - n) x^\alpha).$$

§. 44. Quodſi iam hanc ſeriem denuo per v^μ multiplicemus, iterumque differentiemus, innumerabiles nouas ſeries adipiſcemur, quarum ſummatio itidem eſt in poteſtate. Hocque modo continuo vlterius progredi licebit, quem autem laborem perſequi prorſus foret ſuperfluum.

§. 45. Simili modo per integrationem nouas ſeries elicere poterimus. Quodſi enim ſeriem propoſitam per

$$d v = \frac{\alpha x^{-\alpha-1} d x}{\alpha - \beta} - \frac{\beta x^{-\beta-1} d x}{\alpha - \beta},$$

multiplicemus et vtrinque integremus, perueniemus ad ſequentem ſummationem:

$$\frac{\alpha x^{n-\alpha}}{(\alpha-\beta)(n-\alpha)} - \frac{\beta x^{n-\beta}}{(\alpha-\beta)(n-\beta)} = v + \tfrac{1}{2} A v v$$
$$+ \tfrac{1}{3} B v^3 + \tfrac{1}{4} C v^4 + \tfrac{1}{5} D v^5 + \text{etc.} + \text{conſt.}$$

ad quam conſtantem definiendam conſideretur caſus $v = 0$, quo fit $x = 1$, indeque conſtans $= \frac{n}{(n-\alpha)(n-\beta)}$.

§. 56. Potuiſſemus etiam ante integrationem multiplicare per v^λ; verum hoc modo in calculos nimis operoſos incidiſſemus, vnde nobis ſufficiat, fontem aperuiſſe, ex quo innumerabiles huiusmodi nouae ſeries hauriri queant.

CONTINVATIO DISSERTATIONIS, DE METHODIS INTEGRANDI AEQVATIONES DIFFERENTIALES LINEARES, IN TOMO ACTORVM I.

Auctore

A. I. LEXELL.

§. 1.

Singularem in calculo integrali attentionem illae merentur formulae differentiales, quae ſub forma generali propoſitae integrationem admittunt, quales praeprimis ſunt hae ſequentes:

$$d^m y + \alpha d^{m-1} y + \beta d^{m-2} y + \gamma d^{m-3} \ldots + d y = 0;$$

$$x^m d^m y + \alpha x^{m-1} d^{m-1} y + \beta x^{m-2} d^{m-2} y + \gamma x^{m-3} d^{m-3} y \ldots + d y = 0;$$

quarum poſterior, debita adhibita ſubſtitutione, ad priorem formam reducitur. In priori igitur noſtra diſſertatione quum illas conſiderauerimus formulas differentiales lineares differentialia plurium variabilium inuoluentes, quae ad priorem

priorem formam reduci ſe patiuntur: iam quoque haud praeter rem erit, vt illas examinemus formulas differentiales, quarum integratio a poſteriori iſta formula dependet. In quo quidem negotio aequum eſt, vt a caſibus ſimpliciſſimis ordiamur, quo melius pateſcat, quo tenore haec disquiſitio procedat.

§. 2. Supponamus igitur propoſitas eſſe has binas aequationes differentiales:

$$\text{I. } x^2\, ddy + \alpha x\, dy + \beta x\, dz + \gamma y + \delta z = 0,$$

$$\text{II. } x^2\, ddz + \alpha' x\, dy + \beta' x\, dz + \gamma' y + \delta' z = 0,$$

in quibus differentialium dx nulla eſt habita conſideratio, quippe quum conſtantia ſint et vnitati aequalia ſupponi poſſint. Sumtis igitur differentialibus primis aequationum propoſitarum, habebimus:

$$\text{III. } x^2\, d^3y + (2+\alpha)\, x\, ddy + \beta x\, ddz + (\alpha+\gamma)\, dy + (\beta+\delta)\, dz = 0,$$

$$\text{IV. } x^2\, d^3z + (2+\beta')\, x\, ddz + \alpha' x\, ddy + (\beta'+\gamma')\, dz + (\alpha'+\gamma')\, dy = 0,$$

tumque denuo his aequationibus iterum differentiatis

$$\text{V. } x^2\, d^4y + (4+\alpha)\, x\, d^3y + (2+2\alpha+\gamma)\, ddy + \beta x\, d^3z + (2\beta+\delta)\, ddz = 0,$$

$$\text{VI. } x^2\, d^4z + (4+\beta')\, x\, d^3z + (2+2\beta'+\delta')\, ddz + \alpha' x\, d^3y + (2\alpha'+\gamma')\, ddy = 0.$$

Vt nunc habeatur aequatio ſola differentialia ipſius dy involuens, ſequens fiat combinatio:

$$\text{V. } x^2 + \text{III. } \lambda x + \text{IV. } \lambda' x + \text{I. } \mu + \text{II. } \mu' = 0$$

tumque in aequatione reſultante coefficientes differentia-

 lium

lium ipſius z euaneſcentes ponantur, vti ſequente ſchemate illuſtrabitur:

$d^4 y$	$d^3 y$	ddy	dy	y
$+1$	$+4+\alpha$	$2+2\alpha+\gamma$	$\lambda(\alpha+\gamma)+\mu\alpha$	$\mu\gamma,$
	$+\lambda$	$+\lambda(2+\alpha)$	$+\lambda'(\alpha'+\gamma')+\mu'\alpha'$	$+\mu'\gamma'$
		$+\lambda'\alpha'+\mu$		
	$d^3 z$	ddz	dz	z
	$\beta+\lambda'$	$2\beta+\delta+\lambda\beta$	$\lambda(\beta+\delta)+\mu\beta$	$\mu\delta$
		$+\lambda'(2+\beta)+\mu'$	$\lambda'(\beta'+\delta')+\mu'\beta'$	$+\mu'\delta'.$

Hinc fit

$$\beta+\lambda'=0;\ 2\beta+\delta+\lambda\beta+\lambda'(2+\beta)+\mu'=0;$$
$$\lambda(\beta+\delta)+\mu\beta+\lambda'(\beta'+\delta')+\mu'\beta'=0;\ \mu\delta+\mu'\delta'=0;$$

quibus aequationibus omnino ſatisfit, ponendo

$$\lambda'=-\beta;\ \lambda=+\beta';\ \mu'=-\delta;\ \mu=+\delta'.$$

His autem valoribus ipſorum λ, λ', μ, μ' in coefficientibus differentialium ipſius y ſubſtitutis, prodibit iſta aequatio:

$$\begin{aligned} x^4\, d^4 y &+ (4+\alpha+\beta')\, x^3\, d^3 y \\ &+ (2+2(\alpha+\beta')+\gamma+\delta'+\alpha\beta'-\alpha'\beta)\, x^2\, ddy \\ &+ (\alpha\beta'-\alpha'\beta+\alpha\delta'-\alpha'\delta-\beta\gamma'+\beta'\gamma)\, x\, dy \\ &+ (\gamma\delta'-\gamma'\delta)\, y = 0, \end{aligned}$$

quae iam eſt formae ſupra propoſitae.

§. 3. Procedamus nunc ad binas aequationes differentiales tertii gradus:

$$\text{I. } x^3\, d^3 y + \alpha\, x^2\, ddy + \gamma\, x\, dy + \varepsilon y + \beta\, x^2\, ddz + \delta\, x\, dz + \zeta z = 0,$$

II.

II. $x^3 d^3 z + \beta' x^2 ddz + \delta' x dz + \zeta' z + \alpha' x^2 ddy$
$+ \gamma' x dy + \varepsilon' y = 0,$

ex quibus per triplicem differentiationem ſequentes provenient aequationes:

III. $x^3 d^4 y + (3 + \alpha) x^2 d^3 y + (2\alpha + \gamma) x ddy$
$+ (\gamma + \varepsilon) dy + \beta x^2 d^3 z + (2\beta + \delta) x ddz$
$+ (\delta + \zeta) dz = 0,$

IV. $x^3 d^4 z + (3 + \beta') x^2 d^3 z + (2\beta' + \delta') x ddz$
$+ (\delta' + \zeta') dz + \alpha' x^2 d^3 y + (2\alpha' + \gamma') x ddy$
$+ (\gamma' + \varepsilon') dy = 0,$

V. $x^3 d^5 y + (6 + \alpha) x^2 d^4 y + (6 + 4\alpha + \gamma) x d^3 y$
$+ (2\alpha + 2\gamma + \varepsilon) ddy + \beta x^2 d^4 z$
$+ (4\beta + \delta) x d^3 z + (2\beta + 2\delta + \zeta) ddz = 0,$

VI. $x^3 d^5 z + (6 + \beta') x^2 d^4 z + (6 + 4\beta' + \delta') x d^3 z$
$+ (2\beta' + 2\delta' + \zeta') ddz + \alpha' x^2 d^4 y$
$+ (4\alpha' + \gamma') x d^3 y + (2\alpha' + 2\gamma' + \varepsilon') ddy = 0,$

VII. $x^3 d^6 y + (9 + \alpha) x^2 d^5 y + (18 + 6\alpha + \gamma) x d^4 y$
$+ (6 + 6\alpha + 3\gamma + \varepsilon) d^3 y + \beta x^2 d^5 z$
$+ (6\beta + \delta) x d^4 z + (6\beta + 3\delta + \zeta) d^3 z = 0,$

VIII. $x^3 d^6 z + (9 + \beta') x^2 d^5 z + (18 + 6\beta' + \delta') x d^4 z$
$+ (6 + 6\beta' + 3\delta' + \zeta') d^3 z + \alpha' x^2 d^5 y$
$+ (6\alpha' + \gamma') x d^4 y + (6\alpha' + 3\gamma' + \varepsilon') d^3 y = 0.$

Pro aequatione autem inuenienda, quae ſola differentialia ipſius y inuoluat, ſequens fiat combinatio:

VII. x^3 + V. λx^2 + VI. $\lambda' x^2$ + III. μx + IV. $\mu' x$
+ I. ν + II. ν',

tumque in aequatione reſultante coefficientes differentialium ipſius y nihilo aequales ponantur

$x^6 d^6$

$x^6 d^6 y$	$x^5 d^5 y$	$x^4 d^4 y$	$x^3 d^3 y$	$x^2 ddy$	$x dy$	y
$+1$	$9+\alpha+\lambda$	$12+6\alpha+\gamma$	$6+6\alpha+3\gamma+\varepsilon$	$\lambda(2\alpha+2\gamma+\varepsilon)$	$+\mu(\gamma+\varepsilon)$	$\nu\varepsilon$
		$+\lambda(6+\alpha)$	$+\lambda(6+4\alpha+\gamma)$	$+\mu(2\alpha+\gamma)+\nu\alpha$	$+\nu\gamma$	$+\nu'\varepsilon'$
		$+\mu+\lambda'\alpha'$	$+\mu(3+\alpha)+\nu$	$+\lambda'(2\alpha'+2\gamma'+\varepsilon')$	$+\mu'(\gamma'+\varepsilon')$	
			$+\lambda'(4\alpha'+\gamma')$	$+\mu'(2\alpha'+\gamma')+\nu'\alpha'$	$+\nu'\gamma'$	
			$+\mu'\alpha'$			

$x^5 d^5 z$	$x^4 d^4 z$	$x^3 d^3 z$	$x^2 ddz$	$x dz$	z
$\beta+\lambda'$	$6\beta+\delta$	$6\beta+3\delta+\zeta$	$\lambda(2\beta+2\delta+\zeta)$	$+\mu(\delta+\zeta)$	$\nu\zeta$
	$+\lambda\beta$	$+\lambda(4\beta+\delta)$	$+\mu(2\beta+\delta)+\nu\beta$	$+\nu\delta+\mu'(\delta'+\zeta')$	$+\nu'\zeta'$
	$\lambda'(6+\beta')$	$+\mu\beta$	$+\lambda'(2\beta'+2\delta'+\zeta')$	$+\nu'\delta'$	
	$+\mu'$	$+\lambda'(6+4\beta'+\delta')$	$+\mu'(2\beta'+\delta')+\nu'\beta'$		
		$+\mu'(3+\beta')+\nu'$			

vnde ſequentes reſultant aequationes:

$$\beta+\lambda'=0;\quad 6\beta+\delta+\lambda\beta+\lambda'(6+\beta')+\mu'=0;$$
$$6\beta+3\delta+\zeta+\lambda(4\beta+\delta)+\mu\beta+\lambda'(6+4\beta'+\delta')$$
$$+\mu'(3+\beta')+\nu'=0;$$
$$\lambda(2\beta+2\delta+\zeta)+\mu(2\beta+\delta)+\nu\beta$$
$$+\lambda'(2\beta'+2\delta'+\zeta')+\mu'(2\beta'+\delta')+\nu'\beta'=0;$$
$$\mu(\delta+\zeta)+\nu\delta+\mu'(\delta'+\zeta')+\nu'\delta'=0;$$
$$\nu\zeta+\nu'\zeta'=0.$$

His autem aequationibus adprime ſatisfiet ſequentibus valoribus:

$$\lambda=\beta';\ \lambda'=-\beta;\ \mu=\delta';\ \mu'=-\delta;\ \nu=\zeta';\ \nu'=-\zeta;$$

quibus, in coefficientibus differentialium ipſius y ſubſtitutis, ſequentem obtinebimus aequationem:

$$x^6 d^6 y + A x^5 d^5 y + B x^4 d^4 y + C x^3 d^3 y$$
$$+ D x^2 ddy + E x dy + F y = 0;$$

vbi

vbi $A = q + \alpha + \beta'$;

$B = 18 + 6(\alpha + \beta') + \gamma + \delta' + \alpha\beta' - \alpha'\beta$;

$C = 6 + 6(\alpha + \beta') + 3(\gamma + \delta') + \varepsilon + \zeta'$
$+ 4(\alpha\beta' - \alpha'\beta) + \alpha\delta' - \alpha'\delta + \beta'\gamma - \beta\gamma'$;

$D = 2(\alpha\beta' - \alpha'\beta) + 2(\beta'\gamma - \beta\gamma') + 2(\alpha\delta' - \alpha'\delta)$
$+ \alpha\zeta' - \alpha'\zeta + \beta'\varepsilon - \beta\varepsilon' + \gamma\delta' - \gamma'\delta$;

$E = \gamma\zeta' - \gamma'\zeta + \gamma\delta' - \gamma'\delta + \delta'\varepsilon - \delta\varepsilon'$;

$F = \varepsilon\zeta' - \varepsilon'\zeta$.

§. 4. Vlterius propoſitae ſint hae aequationes differentiales:

I. $x^4 d^4 y + \alpha x^3 d^3 y + \gamma x^2 ddy + \varepsilon x dy + \eta y$
$+ \beta x^3 d^3 z + \delta x^2 ddz + \zeta x dz + \theta z = 0$;

II. $x^4 d^4 z + \beta' x^3 d^3 z + \delta' x^2 ddz + \zeta' x dz + \theta' z$
$+ \alpha' x^3 d^3 y + \gamma' x^2 ddy + \varepsilon' x dy + \eta' y = 0$;

quas quadruplici vice differentiari oportet, vnde ſequentes emergunt aequationes:

III. $x^4 d^5 y + (4 + \alpha) x^3 d^4 y + (3\alpha + \gamma) x^2 d^3 y$
$+ (2\gamma + \varepsilon) x ddy + (\varepsilon + \eta) dy + \beta x^3 d^4 z$
$+ (3\beta + \delta) x^2 d^3 z + (2\delta + \zeta) x ddz$
$+ (\zeta + \theta) dz = 0$;

IV. $x^4 d^5 z + (4 + \beta') x^3 d^4 z + (3\beta' + \delta') x^2 d^3 z$
$+ (2\delta' + \zeta') x ddz + (\zeta' + \theta') dz + \alpha' x^3 d^4 y$
$+ (3\alpha' + \gamma') x^2 ddy + (2\gamma' + \varepsilon') x ddy$
$+ (\varepsilon' + \eta') dy = 0$;

V. $x^4 d^6 y + (8 + \alpha) x^3 d^5 y + (12 + 6\alpha + \gamma) x^2 d^4 y$
$+ (6\alpha + 4\gamma + \varepsilon) x d^3 y + (2\gamma + 2\varepsilon + \eta) ddy$
$+ \beta x^3 d^5 z + (6\beta + \delta) x^2 d^4 z$
$+ (6\beta + 4\delta + \zeta) x d^3 z + (2\delta + 2\zeta + \theta) ddz = 0$;

VI. $x^4 d^6 z + (8 + \beta') x^3 d^5 z + (12 + 6\beta' + \delta') x^2 d^4 z$
$+ (6\beta' + 4\delta' + \zeta') x d^3 z + (2\delta' + 2\zeta' + \theta') d d z$
$+ \alpha' x^3 d^5 y + (6\alpha' + \gamma') x^2 d^4 y$
$+ (6\alpha' + 4\gamma' + \varepsilon') x d^2 y$
$+ (2\gamma' + 2\varepsilon' + \eta') d d y = 0;$

VII. $x^4 d^7 y + (12 + \alpha) x^3 d^6 y + (36 + 9\alpha + \gamma) x^2 d^5 y$
$+ (24 + 18\alpha + 6\gamma + \varepsilon) x d^4 y$
$+ (6\alpha + 6\gamma + 3\varepsilon + \eta) d^3 y$
$+ \beta x^3 d^5 z + (9\beta + \delta) x^2 d^5 z$
$+ (18\beta + 6\delta + \zeta) x d^4 z$
$+ (6\beta + 6\delta + 3\zeta + \theta) d^3 z = 0;$

VIII. $x^4 d^7 z + (12 + \beta') x^3 d^6 z + (36 + 9\beta' + \delta') x^2 d^5 z$
$+ (24 + 18\beta' + 6\delta' + \zeta') x d^4 z$
$+ (6\beta' + 6\delta' + 3\zeta' + \theta') d^3 z$
$+ \alpha' x^3 d^6 y + (9\alpha' + \gamma') x^2 d^5 y$
$+ (18\alpha' + 6\gamma' + \varepsilon') x d^4 y$
$+ (6\alpha' + 6\gamma' + 3\varepsilon' + \eta') d^3 y = 0;$

IX. $x^4 d^8 y + (16 + \alpha) x^3 d^7 y + (72 + 12\alpha + \gamma) x^2 d^6 y$
$+ (96 + 36\alpha + 8\gamma + \varepsilon) x d^5 y$
$+ (24 + 24\alpha + 12\gamma + 4\varepsilon + \eta) d^4 y$
$+ \beta x^3 d^7 z + (12\beta + \delta) x d^6 z$
$+ (36\beta + 8\delta + \zeta) x d^5 z$
$+ (24\beta + 12\delta + 4\zeta + \theta) d^4 z = 0;$

X. $x^4 d^8 z + (16 + \beta') x^3 d^7 z + (72 + 12\beta' + \delta') x^2 d^6 z$
$+ (96 + 36\beta' + 8\delta' + \zeta') x d^5 z$
$+ (24 + 24\beta' + 12\delta' + 4\zeta' + \theta') d^4 z$
$+ \alpha' x^3 d^7 y + (12\alpha' + \gamma') x d^6 y$
$+ (36\alpha' + 8\gamma' + \varepsilon') x d^5 y$
$+ (24\alpha' + 12\gamma' + 4\varepsilon' + \eta') d^4 y = 0.$

Facta

Facta nunc combinatione iſta:

$$\text{IX.}\, x^4 + \text{VII.}\, \lambda\, x^3 + \text{VIII.}\, \lambda'\, x^3 + \text{V.}\, \mu\, x^2 + \text{VI.}\, \mu'\, x^2$$
$$+ \text{III.}\, \nu\, x + \text{IV.}\, \nu'\, x + \text{I.}\, \pi + \text{II.}\, \pi' = 0,$$

et poſitis coëfficientibus differentialium ipſius z nihilo aequalibus, aequatio finalis ſola differentialia ipſius y inuoluet. Erunt vero coëfficientes differentialium ipſius y vti ſequente ſchemate repraeſentantur.

$x^7\, d^7\, y$	$x^6\, d^6\, y$	$x^5\, d^5\, y$	$x^4\, d^4\, y$	$x^3\, d^3\, y$
$16+\alpha+\lambda'$	$72+12\alpha+\gamma$	$96+36\alpha+8\gamma+\varepsilon$	$24+24\alpha+12\gamma+4\varepsilon$	$\lambda(6\alpha+6\gamma+3\varepsilon+\eta)$
	$+\lambda(12+\alpha)$	$+\lambda(36+9\alpha+\gamma)$	$+\eta$	$+\mu(6\alpha+4\gamma+\varepsilon)$
	$+\mu+\lambda\lambda'$	$+\mu(8+\alpha)+\nu$	$+\lambda(24+18\alpha+6\gamma+\varepsilon)$	$+\nu(3\alpha+\gamma)+\pi\alpha$
		$+\lambda'(9\alpha'+\gamma')$	$+\mu(12+6\alpha+\gamma)$	$+\lambda'(6\alpha'+6\gamma'+3\varepsilon'+\eta')$
		$+\mu'\alpha'$	$+\nu(4+\alpha)+\pi$	$+\mu'(6\alpha'+4\gamma'+\varepsilon')$
			$+\lambda'(18\alpha'+6\gamma'+\varepsilon')$	$+\nu'(3\alpha'+\gamma')+\pi'\alpha'$
			$+\mu'(6\alpha'+\gamma')$	
			$+\nu'\alpha'$	

$x^2\, d\, d\, y$	$x\, d\, y$	y
$\mu(2\gamma+2\varepsilon+\eta)$	$\nu(\varepsilon+\eta)+\pi\varepsilon$	$\pi\eta$
$+\nu(2\gamma+\varepsilon)+\pi\gamma$	$+\nu'(\varepsilon'+\eta')+\pi'\varepsilon'$	$+\pi'\eta'$
$+\mu'(2\gamma'+2\varepsilon'+\eta')$		
$+\nu'(2\gamma'+\varepsilon')+\pi'\gamma'$		

Differentialia ipſius $d\,z$ heic adferre intermittimus, quum ex ſuperioribus facile perſpici queat, valores ipſorum λ, λ', μ, μ', etc. ita fore expreſſos:

$$\lambda = +\beta';\ \lambda' = -\beta;\ \mu = +\delta';\ \mu' = -\delta;$$
$$\nu = +\zeta';\ \nu' = -\zeta;\ \pi = +\theta';\ \pi' = -\theta;$$

 his

hisque valoribus ſubſtitutis aequatio finalis per differentialia ipſius y erit

$$x^8 d^8 y + A x^7 d^7 y + B x^6 d^6 y + C x^5 d^5 y + D x^4 d^4 y + E x^3 d^3 y + F x^2 ddy + G x dy + H = 0;$$

vbi valores ipſorum A, B, C etc. ita habentur determinati:

$$A = 16 + \alpha + \beta';$$

$$B = 72 + 12(\alpha + \beta') + \gamma + \delta' + \alpha\beta' - \alpha'\beta;$$

$$C = 96 + 36(\alpha + \beta') + 8(\gamma + \delta') + \varepsilon + \zeta' + 9(\alpha\beta' - \alpha'\beta) + \alpha\delta' - \alpha'\delta + \beta'\gamma - \beta\gamma';$$

$$D = 24 + 24(\alpha + \beta') + 12(\gamma + \delta') + 4(\varepsilon + \zeta') + \eta + \theta' + 18(\alpha\beta' - \alpha'\beta) + 6(\alpha\delta' - \alpha'\delta) + \alpha\zeta' - \alpha'\zeta + 6(\beta'\gamma - \beta\gamma') + \beta'\varepsilon - \beta\varepsilon' + \gamma\delta' - \gamma'\delta;$$

$$E = 6(\alpha\beta' - \alpha'\beta) + 6(\alpha\delta' - \alpha'\delta) + 3(\alpha\zeta' - \alpha'\zeta) + \alpha\theta' - \alpha'\theta + 6(\gamma\beta' - \gamma'\beta) + 4(\gamma\delta' - \gamma'\delta) + (\gamma\zeta' - \gamma'\zeta) + 3(\varepsilon\beta' - \varepsilon'\beta) + \varepsilon\delta' - \varepsilon'\delta + \eta\beta' - \eta'\beta;$$

$$F = 2(\gamma\delta' - \gamma'\delta) + 2(\gamma\zeta' - \gamma'\zeta) + \gamma\theta' - \gamma'\theta + 2(\varepsilon\delta' - \varepsilon'\delta) + \varepsilon\zeta' - \varepsilon'\zeta + \eta\delta' - \eta'\delta;$$

$$G = \varepsilon\zeta' - \varepsilon'\zeta + \varepsilon\theta' - \varepsilon'\theta + \eta\zeta' - \eta'\zeta;$$

$$H = \eta\theta' - \eta'\theta.$$

§. 5. Si haec aequatio conferatur cum illa, quam in priori noſtra Diſſertatione §. 11. deriuauimus ex aequationibus:

$$d^4 x + \alpha d^3 x + \beta d^3 y + \gamma ddx + \delta ddy + \varepsilon dx + \zeta dy + \eta x + \theta y = 0;$$

$d^4 y$

$$d^4y + \alpha' d^3y + \beta' d^3x + \gamma' ddx + \delta' ddy + \varepsilon' dx$$
$$+ \zeta' dy + \eta' x + \theta' y = 0;$$

denotante nunc y quod ibi erat x, et z quod ibi erat y; patet, coëfficientes A, B, C, etc. in nonnullis terminis cum coëfficientibus ibi inuentis conuenire, alios vero praeterea terminos inuoluere, qui ibi non reperiebantur. Sic pro d^3y, quod ibi eſt d^3x, fit

$$C = 96 + 36(\alpha + \beta') + 8(\gamma + \delta') + \varepsilon + \zeta'$$
$$+ 9(\alpha\beta' - \alpha'\beta) + \alpha\delta' - \alpha'\delta + \beta'\gamma - \beta\gamma',$$

quod praeter terminos

$$\varepsilon + \zeta' + \alpha\delta' - \alpha'\delta + \beta'\gamma - \beta\gamma',$$

inſuper inuoluit terminos

$$96 + 36(\alpha + \beta') + 8(\gamma + \delta') + 9(\alpha\beta' - \alpha'\beta).$$

Horum igitur terminorum formatio quomodo procedat, nunc e re eſt vt exponamus.

§. 6. Supponamus igitur generatim binas has aequationes differentiales eſſe propoſitas:

$$x^m d^m y + \alpha x^{m-1} d^{m-1} y + \beta x^{m-1} d^{m-1} z$$
$$+ \gamma x^{m-2} d^{m-2} y + \delta x^{m-2} d^{m-2} z$$
$$+ \varepsilon x^{m-3} d^{m-3} y + \zeta x^{m-3} d^{m-3} z$$
$$+ \eta x^{m-4} d^{m-4} y + \theta x^{m-4} d^{m-4} z + \text{etc.} = 0,$$

$$x^m d^m z + \alpha' x^{m-1} d^{m-1} y + \beta' x^{m-1} d^{m-1} z$$
$$+ \gamma' x^{m-2} d^{m-2} y + \delta' x^{m-2} d^{m-2} z$$
$$+ \varepsilon' x^{m-3} d^{m-3} y + \zeta' x^{m-3} d^{m-3} z$$
$$+ \eta' x^{m-4} d^{m-4} y + \theta' x^{m-4} d^{m-4} z + \text{etc} = 0,$$

ex quibus aequatio differentialis ſola differentialia ipſius y continens

 tinens

tinens erui debeat. In iſta autem aequatione liquet, coëfficientes componi ex numero abſoluto, ſimplicibus his ſummis:

$$\alpha+\beta'; \ \gamma+\delta'; \ \varepsilon+\zeta'; \ \eta+\theta'; \ \iota+\varkappa'; \text{ etc.}$$

tumque productis ſequentibus:

$$\alpha\beta'-\alpha'\beta; \ \alpha\delta'-\alpha'\delta; \ \alpha\zeta'-\alpha'\zeta; \text{ etc.}$$
$$\beta'\gamma-\beta\gamma'; \ \beta'\varepsilon-\beta\varepsilon'; \ \beta'\eta-\beta\eta'; \text{ etc.}$$
$$\gamma\delta'-\gamma'\delta; \ \gamma\zeta'-\gamma'\zeta; \ \gamma\theta'-\gamma'\theta; \text{ etc.}$$
$$\delta'\varepsilon-\delta\varepsilon'; \ \delta'\eta-\delta\eta'; \ \delta'\iota-\delta\iota'; \text{ etc.}$$
$$\varepsilon\zeta'-\varepsilon'\zeta; \ \varepsilon\theta'-\varepsilon'\theta; \ \varepsilon\iota'-\varepsilon'\iota; \text{ etc.}$$

Leui autem adhibita attentione patebit, numeros abſolutos ita procedere:

$$m^2; \ \frac{m^2(m-1)^2}{1.\,2}; \ \frac{m^3(m-1)^2(m-2)^2}{1.\,2.\,3}; \ \frac{m^2(m-1)^2(m-2)^2(m-3)^2}{1.\,2.\,3.\,4}; \text{ etc.}$$

vsque dum peruentum fuerit ad numerum euaneſcentem. Sic poſito $m=4$, numeri abſoluti erunt pro $x^7\, d^7\, y$, 16; pro $x^6\, d^6\, y$, $=\frac{\pi^2(m-1)^2}{1.\,2}=72$; pro

$$x^5\, d^5\, y; =\frac{(m.\, m-1.\, m-2)^2}{1.\,2.\,3}=96;$$

et denique pro

$$x^4\, d^4\, y=\frac{(m.\, m-1.\, m-2.\, m-3)^2}{1.\,2.\,3.\,4}=1.\,2.\,3.\,4=24.$$

At pro termino $x^3\, d^3\, y$ hic numerus euaneſcet, ob

$$\frac{(m.\, m-1.\, m-2.\, m-3.\, m-4)^2}{1.\,2.\,3.\,4.\,5}=0,$$

poſito $m=4$. Deinde coëfficientes numerici ſummae $\alpha+\beta'$ erunt:

$$1; \ m(m-1); \ m\,\frac{(m-1)^2(m-2)}{1.\,2}; \ m\,\frac{(m-1)^2(m-2)^2(m-3)}{1.\,2.\,3};$$
$$m\,\frac{(m-1)^2(m-2)^2(m-3)^2(m-4)}{1.\,2.\,3.\,4} \text{ etc.}$$

continuata hac ſerie vsquedum peruentum fuerit ad terminum euaneſcentem. Sic pro caſu $m=4$, erit

pro	$x^7\, d^7\, y$	$x^6\, d^6\, y$	$x^5\, d^5\, y$	$x^4\, d^4\, y$
coëfficiens ipſius $(\alpha+\beta')$	$+1$	$+12$	$+36$	$+24$

at

at pro termino $x^3 d^3 y$ euadet $= 0$, ob $m = 4$. Vt vero generatio huius ſeriei accuratius perſpiciatur, conſideremus has binas progreſſiones:

$$1;\quad m;\quad \frac{m(m-1)}{1.\,2};\quad \frac{m(m-1)(m-2)}{1.\,2.\,3};$$
$$1;\quad (m-1);\quad (m-1)(m-2);\quad (m-1)(m-2)(m-3);$$
$$\frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{1.\,2.\,3.\,4}\ \text{etc.}$$
$$(m-1)(m-2)(m-3)(m-4),\ \text{etc.}$$

et concipiatur, ſingulos terminos vnius in terminos correſpondentes alterius ductos eſſe, quo facto orietur ſeries pro coëfficientibus ipſius $\alpha + \beta'$. Conſideremus nunc has progreſſiones:

$$1;\quad m;\quad \frac{m(m-1)}{1.\,2};\quad \frac{m(m-1)(m-2)}{1.\,2.\,3};$$
$$1;\quad m-2;\quad (m-2)(m-3);\quad (m-2)(m-3)(m-4);$$
$$\frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{1.\,2.\,3.\,4}\ \text{etc.}$$
$$(m-2)(m-3)(m-4)(m-5)\ \text{etc.}$$

et multiplicando hos terminos inuicem, prodit ſeries pro coëfficientibus ipſius $\gamma + \delta'$. Deinde coëfficientes ipſius $\varepsilon + \zeta'$ oriuntur, multiplicando terminos harum progreſſionum:

$$1;\quad m;\quad \frac{m(m-1)}{1.\,2};\quad \frac{m(m-1)(m-2)}{1.\,2.\,3};$$
$$1;\quad m-3;\quad (m-3)(m-4);\quad (m-3)(m-4)(m-5);$$
$$\frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{1.\,2.\,3.\,4}\ \text{etc.}$$
$$(m-3)(m-4)(m-5)(m-6).$$

ſimilique ratione coëfficientes ipſius $\eta + \theta'$, per multiplicationem terminorum in his progreſſionibus:

$$1;\quad m;\quad \frac{m(m-1)}{1.\,2};\quad \frac{m(m-1)(m-2)}{1.\,2.\,3};\ \text{etc.}$$
$$1;\ m-4;\ (m-4)(m-5);\ (m-4)(m-5)(m-6);\ \text{etc.}$$

Ex quo etiam perſpicuum euadit, quomodo vlterius procedere liceat.

§. 7.

§. 7. Deinde pro formandis coëfficientibus productorum

$$\alpha\beta' - \alpha'\beta;\ \alpha\delta' - \alpha'\delta \text{ etc };\ \gamma\delta' - \gamma'\delta \text{ etc.}$$

ſimilis fiat operatio. Sic pro coëfficientibus ipſorum

$$\alpha\beta' - \alpha'\beta;\ \alpha\delta' - \alpha'\delta;\ \alpha\zeta' - \alpha'\zeta \text{ etc.}$$

iſta ſeries

$$1;\ m-1;\ \frac{(m-1)(m-2)}{1.2};\ \frac{(m-1)(m-2)(m-3)}{1.2.3};\ \frac{(m-1)(m-2)(m-3)(m-4)}{1.2.3.4}$$

ducatur in

$$1;\ m-1;\ (m-1)(m-2);\ (m-1)(m-2)(m-3);\ (m-1)(m-2)(m-3)(m-4)$$

vel in

$$1;\ m-2;\ (m-2)(m-3);\ (m-2)(m-3)(m-4);\ (m-2)(m-3)(m-4)(m-5)$$

vel in

$$1;\ m-3;\ (m-3)(m-4);\ (m-3)(m-4)(m-5);\ (m-3)(m-4)(m-5)(m-6) \text{ etc.}$$

ſicque ducendo terminos ſerierem inferiorum in correſpondentes terminos ſeriei ſuperioris, orientur coëfficientes ipſorum

$$\alpha\beta' - \alpha'\beta;\ \alpha\delta' - \alpha'\delta;\ \alpha\zeta' - \alpha'\zeta;\ \alpha\theta' - \alpha'\theta;$$

coëfficientes vero ipſorum:

$$\beta'\gamma - \beta\gamma';\ \beta'\varepsilon - \beta\varepsilon';\ \beta'\eta - \beta\eta' \text{ etc.}$$

conuenient cum iſtis

$$\alpha\delta' - \alpha'\delta;\ \alpha\zeta' - \alpha'\zeta;\ \alpha\theta' - \alpha'\theta \text{ etc.}$$

Pro formandis coëfficientibus terminorum

$$\gamma\delta' - \gamma'\delta;\ \gamma\zeta' - \gamma'\zeta;\ \gamma\theta' - \gamma'\theta \text{ etc.}$$

iſta

iſta ſeries:

$$1;\ m-2;\ \frac{(m-2)(m-3)}{1.2};\ \frac{(m-2)(m-3)(m-4)}{1.2.3};$$
$$\frac{(m-2)(m-3)(m-4)(m-5)}{1.2.3.4}\ \text{etc.}$$

ducatur in

$$1;\ m-2;\ (m-2)(m-3);\ (m-2)(m-3)(m-4);$$
$$(m-2)(m-3)(m-4)(m-5)$$

vel in

$$1;\ m-3;\ (m-3)(m-4);\ (m-3)(m-4)(m-5);$$
$$(m-3)(m-4)(m-5)(m-6)$$

vel

$$1;\ m-4;\ (m-4)(m-5);\ (m-4)(m-5)(m-6);$$
$$(m-4)(m-5)(m-6)(m-7)$$

ſingulos ſcilicet terminos ſerierum inferiorum in correſpondentes terminos ſeriei ſuperioris ducendo, orientur coëfficientes ipſorum:

$$\gamma\delta'-\gamma'\delta;\ \gamma\zeta'-\gamma'\zeta;\ \gamma\theta'-\gamma'\theta;\ \text{etc.},$$

cum quibus conuenient horum:

$$\delta'\gamma-\delta\gamma';\ \delta'\varepsilon-\delta\varepsilon';\ \delta'\eta-\delta\eta';\ \text{etc.}$$

coëfficientes. Nunc facile patet, quomodo vlterius procedere liceat pro formandis coëfficientibus ipſorum:

$$\varepsilon\zeta'-\varepsilon'\zeta;\ \varepsilon\theta'-\varepsilon'\theta;\ \varepsilon\varkappa'-\varepsilon'\varkappa;\ \text{etc., et}$$
$$\zeta'\varepsilon-\zeta\varepsilon';\ \zeta'\eta-\zeta\eta';\ \zeta'\iota-\zeta\iota',\ \text{etc.}$$

ſcilicet ducendo ſingulos terminos huius ſeriei:

$$1;\ m-3;\ \frac{(m-3)(m-4)}{1.2};\ \frac{m-3)(m-4)(m-5)}{1.2.3}\ \text{etc.}$$

in correſpondentes ſerierum ſequentium:

$$1;\ m-3;\ (m-3)(m-4);\ (m-3)(m-4)(m-5);\ \text{etc.}$$

$1; m-4; (m-4)(m-5); (m-4)(m-5)(m-6);$ etc.

$1; m-5; (m-5)(m-6); (m-5)(m-6)(m-7);$ etc.

coëfficientes iſtorum terminorum orientur. Atque hac ratione coëfficientes terminorum

$$\eta\theta' - \eta'\theta;\ \eta\varkappa' - \eta'\varkappa;\ \iota\varkappa' - \iota'\varkappa;$$

et reliquorum facile formari poſſunt.

§. 8. Si nunc aequatio, ſola differentialia ipſius y inuoluens, ex iſtis aequationibus §. 6. propoſitis oriunda, ſupponatur eſſe:

$$x^{2m} d^{2m} y + A x^{2m-1} d^{2m-1} y + B x^{2m-2} d^{2m-2} y$$
$$+ C x^{2m-3} d^{2m-3} y + D x^{2m-4} d^{2m-4} y$$
$$+ E x^{2m-5} d^{2m-5} y + F x^{2m-6} d^{2m-6} y$$
$$+ \text{etc.} \ldots + Q y = 0,$$

coëfficientium A, B, C, D, etc. valores ita erunt expreſſi:

$$A = m^2 + \alpha + \beta';$$

$$B = \frac{m^2 (m-1)^2}{1.2} + m(m-1)(\alpha + \beta') + \gamma + \delta' + \alpha\beta' - \alpha'\beta;$$

$$C = \frac{m^2 (m-1)^2 (m-2)^2}{1.2.3} + \frac{m(m-1)^2(m-2)}{1.2}(\alpha + \beta')$$
$$+ m(m-2)(\gamma + \delta') + \varepsilon + \zeta' + (m-1)^2(\alpha\beta' - \alpha'\beta)$$
$$+ \alpha\delta' - \alpha'\delta + \beta'\gamma - \beta\gamma';$$

$$D = \frac{m^2(m-1)^2(m-2)^2(m-3)^2}{1.2.3.4} + \frac{m(m-1)^2(m-2)^2}{1.2.3}(m-3)(\alpha + \beta')$$
$$+ \frac{m(m-1)}{1.2}(m-2)(m-3)(\gamma + \delta') - m(m-3)(\varepsilon + \zeta')$$
$$+ \eta + \theta' + \frac{(m-1)^2(m-2)^2}{1.2}(\alpha\beta' - \alpha'\beta)$$
$$+ (m-1)(m-2)(\alpha\delta' - \alpha'\delta) + \alpha\zeta' - \alpha'\zeta$$
$$+ (m-1)(m-2)(\beta'\gamma - \beta\gamma') + \beta'\varepsilon - \beta\varepsilon'$$
$$+ \gamma\delta' - \gamma'\delta).$$

E =

$$E = \frac{(m(m-1)(m-2)(m-3)(m-4))^2}{1.2.3.4.5}$$
$$+ \frac{m(m-1)^2(m-2)^2(m-3)^2(m-4)}{1.2.3.4}(\alpha + \beta')$$
$$+ \frac{m(m-1)(m-2)^2}{1.2.3}(m-3)(m-4)(\gamma + \delta')$$
$$+ \frac{m(m-1)}{1.2}(m-3)(m-4)(\varepsilon + \zeta')$$
$$+ m(m-4)(\eta + \theta') + \iota + \varkappa'$$
$$+ \frac{((m-1)(m-2)(m-3))^2}{1.2}(\alpha\beta' - \alpha'\beta)$$
$$+ \frac{(m-1)(m-2)^2(m-3)}{1.2}(\alpha\delta' - \alpha'\delta) + (m-1)(m-3)(\alpha\zeta' - \alpha'\zeta)$$
$$+ \alpha\theta' - \alpha'\theta + \frac{(m-1)(m-2)^2}{1.2}(m-3)(\beta'\gamma - \beta\gamma')$$
$$+ (m-1)(m-3)(\beta'\varepsilon - \beta\varepsilon') + \beta'\eta - \beta\eta'$$
$$+ (m-2)^2(\gamma\delta' - \gamma'\delta) + \gamma\zeta' - \gamma'\zeta + \delta'\varepsilon - \varepsilon\delta'.$$

Vbi quidem facile patet, quo tenore reliqui coëfficientes procedere debeant.

§. 9. Hac igitur ratione, ſi binae proponantur formulae differentiales formae iſtius commemoratae, generatim quidem aſſignare licet formulam differentialem, quae non niſi differentialia vnius variabilis inuoluat; at ſi tres propoſitae fuerint huiusmodi formulae differentiales, tum disquiſitio iſta multo operoſior et perplexior euadet, id quod exemplo quodam illuſtrare placet. Sint igitur propoſitae iſtae tres aequationes differentiales:

$$\text{I. } x^2 ddy + \alpha x dy + \beta x dz + \gamma x dv + \delta y + \varepsilon z + \zeta v = 0;$$
$$\text{II. } x^2 ddz + \alpha' x dy + \beta' x dz + \gamma' x dv + \delta' y + \varepsilon' z + \zeta' v = 0;$$
$$\text{III. } x^2 ddv + \alpha'' x dy + \beta'' x dz + \gamma'' x dv + \delta'' y + \varepsilon'' z + \zeta'' v = 0;$$

ex quibus aequationem elicere oportet differentialem, ſola differentialia vnius harum variabilium, vtpote y, inuolvens. Modo igitur ſupra praeſcripto differentientur harum

rum aequationum prima quadruplici vice, reliquae autem triplici vice, vnde ſequentes prodibunt aequationes differentiales:

$$\text{IV.}\quad x^2 d^3 y + (2+\alpha) x\, ddy + \beta x\, ddz + \gamma x\, ddv + (\alpha+\delta) dy + (\beta+\varepsilon) dz + (\gamma+\zeta) dv = 0;$$

$$\text{V.}\quad x^2 d^3 z + \alpha' x\, ddy + (2+\beta') x\, ddz + \gamma' x\, ddv + (\alpha'+\delta') dy + (\beta'+\varepsilon') dz + (\gamma'+\zeta') dv = 0;$$

$$\text{VI.}\quad x^2 d^3 v + \alpha'' x\, ddy + \beta'' x\, ddz + (\varepsilon''+\gamma'') x\, ddv + (\alpha''+\delta'') dy + (\beta''+\varepsilon'') dz + (\gamma''+\zeta'') dv = 0;$$

$$\text{VII.}\quad x^2 d^4 y + (4+\alpha) x\, d^3 y + \beta x\, d^3 z + \gamma x\, d^3 v + (2+2\alpha+\delta) ddy + (2\beta+\varepsilon) ddz + (2\gamma+\zeta) ddv = 0;$$

$$\text{VIII.}\quad x^2 d^4 z + \alpha' x\, d^3 y + (4+\beta') x d^3 z + \gamma' x\, d^3 v + (2\alpha'+\delta') ddy + (2+2\beta'+\varepsilon') ddz + (2\gamma'+\zeta') ddv = 0;$$

$$\text{IX.}\quad x^2 d^4 v + \alpha'' x d^3 y + \beta'' x\, d^3 z + (4+\gamma'') x d^3 v + (2\alpha''+\delta'') ddy + (2\beta''+\varepsilon'') ddz + (2+2\gamma''+\zeta'') ddv = 0;$$

$$\text{X.}\quad x^2 d^5 y + (6+\alpha) x d^4 y + \beta x\, d^4 z + \gamma x\, d^4 v + (6+3\alpha+\delta) d^3 y + (3\beta+\varepsilon) d^3 z + (3\gamma+\zeta) d^3 v = 0;$$

$$\text{XI.}\quad x^2 d^5 z + \alpha' x\, d^4 y + (6+\beta') x\, d^4 z + \gamma' x\, d^4 v + (3\alpha'+\delta') d^3 y + (6+3\beta'+\varepsilon') d^3 z + (3\gamma'+\zeta') d^3 v = 0;$$

$$\text{XII.}\quad x^2 d^5 v + \alpha'' x d^4 y + \beta'' x\, d^4 z + (6+\gamma'') x\, d^4 v + (3\alpha''+\delta'') d^3 y + (3\beta''+\varepsilon'') d^3 z + (6+3\gamma''+\zeta'') d^3 v = 0;$$

$$\text{XIII.}\quad x^2 d^6 y + (8+\alpha) x d^5 y + \beta x\, d^5 z + \gamma x d^5 v + (12+4\alpha+\delta) d^4 y + (4\beta+\varepsilon) d^4 z + (4\gamma+\zeta) d^4 v = 0.$$

§. 10. Harum aequationum ſi ſequens inſtituatur combinatio:

XIII.

$$\text{XIII.}\, x^4 + \text{X.}\, \lambda x^3 + \text{XI.}\, \lambda' x^3 + \text{XII.}\, \lambda'' x^3 + \text{VII.}\, \mu x^2 + \text{VIII.}\, \mu' x^2 + \text{IX.}\, \mu'' x^2 + \text{IV.}\, \nu x + \text{V.}\, \nu' x + \text{VI.}\, \nu'' x + \text{I.}\, \varrho + \text{II.}\, \varrho' + \text{III.}\, \varrho'',$$

tumque coëfficientes differentialium ipſorum z et v nihilo aequales ponantur, prodibit aequatio ſolis differentialibus ipſius y affecta. Ratio autem coëfficientium pro differentialibus ipſorum z et v ſequenti ſchemate repraeſentatur:

$x^5 d^5 z$	$x^4 d^4 z$	$x^3 d^3 z$	$x^2 d d z$
β $+\lambda$	$4\beta+\varepsilon+\lambda\beta$ $\lambda'(6+\beta')$ $\lambda''\beta''+\mu'$	$\lambda(3\beta+\varepsilon)+\mu\beta$ $+\lambda'(6+3\beta'+\varepsilon')$ $+\mu'(4+\beta')+\nu'$ $\lambda''(3\beta''+\varepsilon'')+\mu''\beta''$	$\mu(2\beta+\varepsilon)\nu\beta$ $+\mu'(2+2\beta'+\varepsilon')$ $+\nu'(2+\beta')+\varrho'$ $+\mu''(2\beta''+\varepsilon'')+\nu''\beta''$

$x d z$	z
$\nu(\beta+\varepsilon)+\varrho\beta$ $\nu'(\beta'+\varepsilon')+\varrho'\beta'$ $\nu''(\beta''+\varepsilon'')\varrho''\beta''$	$\varrho\varepsilon$ $\varrho'\varepsilon'$ $\varrho''\varepsilon''$

$\alpha^5 d^5 v$	$x^4 d^4 v$	$x^3 d^3 v$	$+ x^2 d d v$
γ $+\lambda''$	$4\gamma+\zeta+\lambda\gamma$ $\lambda'\gamma'+\lambda''(6+\gamma'')$ $+\mu''$	$\lambda(3\gamma+\zeta)+\mu\gamma$ $+\lambda'(3\gamma'+\zeta')+\mu'\gamma''$ $+\lambda''(6+3\gamma''+\zeta'')$ $+\mu''(4+\gamma'')+\nu''$	$\mu(2\gamma+\zeta)+\nu\gamma$ $+\mu'(2\gamma'+\zeta')+\nu'\gamma'$ $+\mu''(2+2\gamma''+\zeta'')$ $+\nu''(2+\gamma'')+\varrho''$

$+ x d v$	v
$\nu(\gamma+\zeta)+\varrho\gamma$ $+\nu'(\gamma'+\zeta')+\varrho'\gamma'$ $+\nu''(\gamma''+\zeta'')+\varrho''\gamma''$	$\varrho\zeta$ $+\varrho'\zeta'$ $+\varrho''\zeta''$

His igitur coëfficientibus nihilo aequatis, pro incognitis λ, μ, ν, ϱ ſequentes obtinebimus valores:

$$\lambda = \beta' + \gamma'' + 4;\ \lambda' = -\beta;\ \lambda'' = -\gamma;$$
$$\mu = \beta'\gamma'' - \beta''\gamma' + 2\beta' + 2\gamma'' + \varepsilon' + \zeta'' + 2;$$
$$\mu' = \beta''\gamma - \beta\gamma'' - 2\beta - \varepsilon;$$
$$\mu'' = \beta\gamma' - \beta'\gamma - 2\gamma - \zeta;$$
$$\nu = \gamma''\varepsilon' - \gamma'\varepsilon'' + \beta'\zeta'' - \beta''\zeta' + \beta'\gamma'' - \beta''\gamma';$$
$$\nu' = \gamma\varepsilon'' - \gamma''\varepsilon + \beta''\zeta - \beta\zeta'' + \beta''\gamma - \beta\gamma'';$$
$$\nu'' = \gamma'\varepsilon - \gamma\varepsilon' + \beta\zeta' - \beta'\zeta + \beta\gamma' - \beta'\gamma;$$
$$\varrho = \varepsilon'\zeta'' - \varepsilon''\zeta';\ \varrho' = \varepsilon''\zeta - \varepsilon\zeta'';\ \varrho'' = \varepsilon\zeta' - \varepsilon'\zeta:$$

Et heic quidem facile liquet, diſquiſitionem pro caſu praeſenti eo ipſo aliquanto difficiliorem euadere, quod valores λ, μ cum iſtis, λ', λ'', μ', μ'', non prorſus in pari ſint ratione, quippe quum λ et μ numeros quoque abſolutos inuoluant.

§. 11. Aequationis differentialis ſola differentialia ipſius y inuoluentis indoles, quum ſequenti ſchemate repraeſentetur:

$x^6 d^6 y$	$x^5 d^5 y$	$x^4 d^4 y$	$x^3 d^3 y$
$+1$	$+8+\alpha+\lambda$	$12+4\alpha+\delta$	$+\lambda(6+3\alpha+\delta)$
		$+\lambda(6+\alpha)+\mu$	$+\mu(4+\alpha)+\nu$
		$+\lambda'\alpha'+\lambda''\alpha''$	$+\lambda'(3\alpha'+\delta')+\mu'\alpha'$
			$+\lambda''(3\alpha''+\delta'')+\mu''\alpha''$

$x^2 ddy$	$x dy$	y
$+\mu(2+2\alpha+\delta)$	$+\nu(\alpha+\delta)+\varrho\alpha$	$+\varrho\delta$
$+\nu(2+\alpha)+\varrho$	$+\nu'(\alpha'+\delta')+\varrho'\alpha'$	$+\varrho'\delta'$
$+\mu'(2\alpha'+\delta')+\nu'\alpha'$	$+\nu''(\alpha''+\delta'')+\varrho''\alpha''$	$+\varrho''\delta''$
$+\mu''(2\alpha''+\delta'')+\nu''\alpha''$		

ſubſti-

ſubſtitutis nunc pro λ', λ'', μ, μ', etc. eorum valoribus ſupra inuentis, aequatio noſtra differentialis ſequenti ratione erit expreſſa:

$$x^6\, d^6 y + A\, x^5\, d^5 y + B\, x^4\, d^4 y + C\, x^3\, d^3 y$$
$$+ D\, x^2\, ddy + E\, x\, dy + F\, y = 0,$$

exiſtentibus

$$A = 12 + \alpha + \beta' + \gamma''.$$

$$B = 38 + 8(\alpha + \beta' + \gamma'') + \delta + \varepsilon' + \zeta'' + \alpha\beta' - \alpha'\beta$$
$$+ \beta'\gamma'' - \beta''\gamma' + \gamma''\alpha - \gamma\alpha''.$$

$$C = 32 + 14(\alpha + \beta' + \gamma'') + 4(\delta + \varepsilon' + \zeta'')$$
$$+ 5(\alpha\beta' - \alpha'\beta + \beta'\gamma'' - \beta''\gamma' + \gamma''\alpha - \gamma\alpha'')$$
$$+ \alpha\varepsilon' - \alpha'\varepsilon + \varepsilon'\gamma'' - \varepsilon''\gamma' + \gamma''\delta - \gamma\delta'' + \delta\beta' - \delta'\beta$$
$$+ \beta'\zeta'' - \beta''\zeta' + \zeta''\alpha - \zeta\alpha'' + \alpha\beta'\gamma'' - \alpha\beta''\gamma$$
$$+ \alpha'\beta''\gamma - \alpha'\beta\gamma'' + \alpha''\beta\gamma' - \alpha''\beta'\gamma.$$

$$D = 4 + 4(\alpha + \beta' + \gamma'') + 2(\delta + \varepsilon' + \zeta'')$$
$$+ 4(\alpha\beta' - \alpha'\beta + \beta'\gamma'' - \beta''\gamma' + \gamma''\alpha - \gamma\alpha'')$$
$$+ 2(\alpha\varepsilon' - \alpha'\varepsilon + \varepsilon'\gamma'' - \varepsilon''\gamma' + \gamma''\delta - \gamma\delta''$$
$$+ \delta\beta' - \delta'\beta + \beta'\zeta'' - \beta''\zeta' + \zeta''\alpha - \zeta\alpha'')$$
$$+ \delta\varepsilon' - \delta'\varepsilon + \varepsilon'\zeta'' - \varepsilon''\zeta' + \zeta''\delta - \zeta\delta''$$
$$+ 3\alpha(\beta'\gamma'' - \beta''\gamma') + 3\alpha'(\beta''\gamma - \beta\gamma'')$$
$$+ 3\alpha''(\beta\gamma' - \beta'\gamma) + \alpha'(\beta'\zeta'' - \beta''\zeta' + \gamma''\varepsilon' - \gamma'\varepsilon'')$$
$$+ \delta(\beta'\gamma'' - \beta''\gamma')$$
$$+ \alpha'(\beta''\zeta - \beta\zeta'' + \gamma\varepsilon'' - \gamma''\varepsilon) + \delta'(\beta''\gamma - \beta\gamma'')$$
$$+ \alpha''(\beta\zeta' - \beta'\zeta + \gamma'\varepsilon - \gamma\varepsilon') + \delta''(\beta\gamma' - \beta'\gamma).$$

$$E = \alpha(\beta'\gamma'' - \beta''\gamma' + \gamma''\varepsilon' - \gamma'\varepsilon'' + \varepsilon'\zeta'' - \varepsilon''\zeta' + \zeta''\beta' - \zeta'\beta'')$$
$$+ \alpha'(\beta''\gamma - \beta\gamma'' + \gamma\varepsilon'' - \gamma''\varepsilon + \varepsilon''\zeta - \varepsilon\zeta'' + \zeta\beta'' - \zeta''\beta)$$
$$+ \alpha''(\beta\gamma' - \beta'\gamma + \gamma'\varepsilon - \gamma\varepsilon' + \varepsilon\zeta' - \varepsilon'\zeta + \zeta'\beta - \zeta\beta')$$

$+ \delta$

$$+\delta(\beta'\gamma''-\beta''\gamma'+\gamma''\varepsilon'-\gamma'\varepsilon''+\beta'\zeta''-\beta''\zeta')$$
$$+\delta'(\beta''\gamma-\beta\gamma''+\gamma\varepsilon''-\gamma''\varepsilon+\beta''\zeta-\beta\zeta'')$$
$$+\delta''(\beta\gamma'-\beta'\gamma+\gamma'\varepsilon-\gamma\varepsilon'+\beta\zeta'-\beta'\zeta).$$
$$F=\delta(\varepsilon'\zeta''-\varepsilon''\zeta')+\delta'(\varepsilon''\zeta-\varepsilon\zeta'')+\delta''(\varepsilon\zeta'-\varepsilon'\zeta).$$

Quum igitur pro caſu hoc ſimpliciori coëfficientes terminorum valde ſint perplexi, facile perſpicitur, ſi ad caſus difficiliores progrediamur, vtpote aequationes tertii vel quarti ordinis, differentialia trium variabilium inuoluentes, vel ad aequationes differentiales eiusdem generis, quatuor vel plurium variabilium differentialibus affectas, tum calculum adeo euadere complicatum, vt non niſi operoſiſſimo labore expediri queat. Caeterum ſi in caſu maneamus trium variabilium, euidens eſt, formulam generalem, pro aequatione reſultante ex tribus aequationibus differentialibus, cuiuscunque fuerint ordinis, tradi non poſſe, niſi ex pluribus exemplis inductio, pro ordine, quo coëfficientes progrediuntur, formari potuerit, vti hoc ſupra pro binis aequationibus differentialibus §. 8. praeſtitimus.

§. 12. De integrationibus ſupra allatis generatim obſeruandum eſt, in illis differentiale dx conſtans ſupponi, nec ſi ponatur dx variabile, iſtae integrationes locum non habebunt. Interim tamen eiusmodi incidunt caſus, quibus, etiamſi dx non fuerit conſtans, tamen integrationem perficere liceat. Huiusmodi caſus primum eſt ille, vbi $\frac{m\,dx}{x}=\frac{du}{u}$, poſito du differentiali conſtanti; nam ſi proponantur aequationes differentiales:

$$\frac{x^2\,ddy}{dx^2}+\frac{\alpha x\,dy}{dx}+\frac{\beta x\,dz}{dx}+\gamma y+\delta z=0,$$
$$\frac{x^2\,ddz}{dx^2}+\frac{\alpha' x\,dy}{dx}+\frac{\beta' x\,dz}{dx}+\gamma' y+\delta' z=0,$$

intro-

introducendo loco $\frac{x^2}{dx^2}$, $\frac{m^2 u^2}{du^2}$ et $\frac{m u}{du}$ loco $\frac{x}{dx}$, conſequemur has aequationes:

$$\frac{u^2 ddy}{du^2} + \frac{\alpha u dy}{m du} + \frac{\beta u dz}{m du} + \frac{\gamma y}{m^2} + \frac{\delta z}{m^2} = 0;$$
$$\frac{u^2 ddz}{du^2} + \frac{\alpha' u dy}{m du} + \frac{\beta' u dz}{m du} + \frac{\gamma' y}{m^2} + \frac{\delta' z}{m^2} = 0;$$

quas iam, ob differentiale du conſtans, vt ſupra tractare licebit. Deinde etiam iſto caſu aequationes propoſitae reſolui poſſunt, quo $\frac{dx}{x} = dv$, poſito dv differentiali conſtanti; hinc enim fit $x = e^v$, poſito e numero, cuius logarithmus hyperbolicus $= 1$, tumque fiet generatim

$$\frac{x^n d^n y}{dx^n} = \frac{x^n}{dx^n} d^{n-1} \left(\frac{dy}{dx}\right) dx = \frac{e^v}{dx^n} d^{n-1} (e^{-v} dy).$$

Pro caſu igitur propoſito, ſubſtitutione facta, hae prodibunt aequationes:

$$\frac{ddy}{dv^2} + (\alpha - 1)\frac{dy}{dv} + \frac{\beta dz}{dv} + \gamma y + \delta z = 0,$$
$$\frac{ddz}{dv^2} + \frac{\alpha' dy}{dv} + (\beta' - 1)\frac{dz}{dv} + \gamma' y + \delta' z = 0,$$

quales in Diſſertatione noſtra priori contemplati ſumus.

§. 13. Praeter Methodum tractandi aequationes differentiales eius generis, quas nunc contemplati ſumus, in noſtra Diſſertatione priori adhuc aliam propoſuimus, quae procedit per inuentionem multiplicatorum, in quos aequationes duci debent, vt integrabiles euadant; cuius vt applicatio pateat ad caſus praeſentes, eam exemplo quodam illuſtraſſe haud pigebit, vbi quidem in caſu quodam ſimpliciore manſiſſe ſufficiet. Si igitur proponantur binae hae aequationes differentiales:

$$x^2\,ddy + \alpha x\,dy + \beta x\,dz + \gamma y + \delta z = 0;$$
$$x^2\,ddz + \alpha' x\,dy + \beta' x\,dz + \gamma' y + \delta' z = 0;$$

tumque ſtatuantur

$$dy = p\,dx;\; dz = p'\,dx;\; ddy = q\,dx^2;\; ddz = q'\,dx^2;$$

illis valoribus introductis fiet:

$$x^2 q + \alpha x p + \beta x p' + \gamma y + \delta z = 0;$$
$$x^2 q' + \alpha' x p + \beta' x p' + \gamma' y + \delta' z = 0.$$

Vlterius ſit pro priori aequatione multiplicator Φ et pro poſteriori ψ, et concipiamus aequationem

$$\Phi(x^2 q + \alpha x p + \beta x p' + \gamma y + \delta z)$$
$$+ \psi(x^2 q' + \alpha' x p + \beta' x p' + \gamma' y + \delta' z) = 0;$$

eſſe integrabilem, vnde, quum criteria integrabilitatis praebeant has aequationes:

$$N - \frac{dP}{dx} + \frac{ddQ}{dx^2} = 0;\; N' - \frac{dP'}{dx} + \frac{ddQ'}{dx^2} = 0;$$

exiſtentibus

$$N = \gamma\Phi + \gamma'\psi; \qquad N' = \delta\Phi + \delta'\psi$$
$$P = \alpha x\Phi + \alpha' x\psi; \qquad P' = \beta x\Phi + \beta' x\psi$$
$$Q = x^2\Phi \qquad Q' = x^2\psi$$

ſuppoſito nimirum quod Φ et ψ non niſi functiones quantitatis x inuoluant, eſſe debebit:

$$x^2\,dd\Phi + (4-\alpha)x\,d\Phi - \alpha' x\,d\psi$$
$$+ (2-\alpha+\gamma)\Phi + (\gamma'-\alpha')\psi = 0;$$
$$x^2\,dd\psi + (4-\beta')x\,d\psi - \beta x\,d\Phi$$
$$+ (2-\beta'+\delta')\psi + (\delta-\beta)\Phi = 0;$$

quae aequationes nunc iterum ipſius formae propoſitae ſunt, ideoque ſufficiet, ſi pro Φ et ψ valores particulares, his

his aequationibus ſatisfacientes, adhibeantur. Primum vero, ob conſimilem rationem ipſarum ϕ et ψ, ſtatuamus $\psi = m\phi$, ex quo obtinebimus:

$$x^2 dd\phi + (4 - \alpha - m\alpha')xd\phi$$
$$+ (2 - \alpha + \gamma + m(\gamma' - \alpha')\phi = 0;$$
$$mx^2 dd\phi + (m(4 - \beta') - \beta)xd\phi$$
$$+ (m(2 - \beta' + \delta') + \delta - \beta)\phi = 0.$$

Leui autem adhibita attentione patet, valorem particularem pro ϕ in vſum vocandum huius fore formae $\phi = x^\lambda$; inde enim fiet

$$d\phi = \lambda x^{\lambda-1} dx \text{ et } dd\phi = \lambda(\lambda - 1)x^{\lambda-2},$$

quare ſubſtitutis his valoribus prodibunt binae iſtae aequationes:

$$\lambda(\lambda - 1) + \lambda(4 - \alpha - m\alpha') + 2 - \alpha + \gamma$$
$$+ m(\gamma' - \alpha') = 0;$$
$$m\lambda(\lambda - 1) + m\lambda(4 - \beta') - \lambda\beta$$
$$+ m(2 - \beta' + \delta') + \delta - \beta = 0,$$

ex quibus λ et m determinari oportet.

§. 14. Hinc igitur conſequimur per priorem aequationem

$$m = \frac{\lambda(\lambda - 1) + \lambda(4 - \alpha) + 2 - \alpha + \gamma}{\lambda\alpha' + \alpha' - \gamma'},$$

et per poſteriorem

$$m = \frac{\lambda\beta + \beta - \delta}{\lambda(\lambda - 1) + \lambda(4 - \beta') + 2 - \beta' + \delta'}.$$

His igitur valoribus inuicem aequatis orietur:

$$\left\{\begin{aligned}&\lambda^2(\lambda-1)^2+\lambda^2(\lambda-1)(4-\alpha)+\lambda(\lambda-1)(2-\alpha+\gamma)+\lambda(4-\beta')(2-\alpha+\gamma)\\&\qquad+\lambda^2(\lambda-1)(4-\beta')+\lambda^2(4-\alpha)(4-\beta')\quad+\lambda(4-\alpha)(2-\beta'+\delta')\\&\qquad\qquad+\lambda(\lambda-1)(2-\beta'+\delta')-\lambda\beta(\alpha'-\gamma')\\&\qquad\qquad-\lambda^2\alpha'\beta\qquad\qquad-\lambda\alpha'(\beta-\delta)\\&\qquad+(2-\alpha+\gamma)(2-\beta'+\delta')\\&\qquad+(\alpha'-\gamma')(\beta-\delta)\end{aligned}\right\}=0,$$

& facta euolutione:

$$\begin{aligned}&\lambda^4+\lambda^3(6-\alpha-\beta')+\lambda^2(12-4(\alpha+\beta')-\gamma-\delta'+\alpha\beta'-\alpha'\beta)\\&\quad+\lambda(12-5(\alpha+\beta')+3(\gamma+\delta')+2(\alpha\beta'-\alpha'\beta)-(\alpha\delta'-\alpha'\delta)+\beta\gamma'-\beta'\gamma)\\&\quad+4-2(\alpha+\beta')+2(\gamma+\delta')+\alpha\beta'-\alpha'\beta-\alpha\delta'+\alpha'\delta\\&\qquad+\beta\gamma'-\beta'\gamma+\gamma\delta'-\gamma'\delta=0,\end{aligned}$$

vnde iam omnino liquet, quatuor valores ipſius λ prodire. Caeterum iam facile perſpicitur, aequationis integralis huiusmodi fore formam:

$$x^{\lambda+1}(x\,dy+m\,x\,dz+Ay+Bz)=C,$$

vnde ſumtis differentialibus colligitur:

$$\begin{aligned}x^\lambda(x^2\,ddy+m\,x^2\,ddz&+(\lambda+2)\,x\,dy+m(\lambda+2)\,x\,dz\\&+A\,x\,dy\qquad+B\,x\,dz\\+(\lambda+1)Ay&+(\lambda+1)Bz)=0,\end{aligned}$$

quae aequatio ſi conferatur cum iſta:

$$\begin{aligned}x^\lambda(x^2\,ddy+m\,x^2\,ddz+(\alpha+m\alpha')\,x\,dy+(\beta+m\beta')\,x\,dz\\+(\gamma+m\gamma')\,y+(\delta+m\delta')\,z)=0,\end{aligned}$$

conſequimur has aequalitates:

$$\lambda+2+A=\alpha+m\alpha';\quad m(\lambda+\alpha)+B=\beta+m\beta';$$
$$(\lambda+1)A=\gamma+m\gamma';\quad(\lambda+1)B=\delta+m\delta'.$$

Hinc

Hinc prodibit ex prima et ſecunda:

$$(\lambda+2)(\lambda+1)+(\lambda+1)A=(\lambda+1)(\alpha+m\alpha')$$
$$m(\lambda+2)(\lambda+1)+B(\lambda+1)=(\beta+m\beta')(\lambda+1),$$

ideoque

$$(\lambda+2)(\lambda+1)=(\lambda+1)(\alpha+m\alpha')-\gamma-m\gamma';$$
$$m(\lambda+2)(\lambda+1)=(\lambda+1)(\beta+m\beta')-\delta-m\delta';$$

ex priori harum fit

$$m=\frac{(\lambda+2)(\lambda+1)-(\lambda+1)\alpha+\gamma}{(\lambda+1)\alpha'-\gamma'},$$

et ex poſteriori

$$m=\frac{(\lambda+1)\beta-\delta}{(\lambda+2)(\lambda+1)-(\lambda+1)\beta'+\delta'},$$

vnde iterum ad eandem pro λ determinando peruenimus aequationem ac ſupra, quae vero concinnius ſic exprimi videtur:

$$\begin{aligned}(\lambda+2)^2(\lambda+1)^2-(\lambda+2)(\lambda+1)^2(\alpha+\beta')&\\ +(\lambda+2)(\lambda+1)(\gamma+\delta')+(\lambda+1)^2(\alpha\beta'-\alpha'\beta)&\\ +(\lambda+1)(\alpha'\delta-\alpha\delta'+\beta\gamma'-\beta'\gamma)&\\ +\gamma\delta'-\gamma'\delta=0;&\end{aligned}$$

vnde loco $(\lambda+2)(\lambda+1)$ ponendo

$$(\lambda+4)(\lambda+3)-4(\lambda+3)+2,$$

loco $\lambda+1$, $\lambda+3-2$, et denique loco $\lambda+1$, $\lambda+2-1$, iſta prodibit aequatio:

$$\begin{aligned}&(\lambda+4)(\lambda+3)(\lambda+2)(\lambda+1)-(\lambda+3)(\lambda+2)(\lambda+1)(4+\alpha+\beta')\\ &+(\lambda+2)(\lambda+1)(2+2(\alpha+\beta')+\gamma+\delta'+\alpha\beta'-\alpha'\beta)\\ &-(\lambda+1)(\alpha\beta'-\alpha'\beta+\alpha\delta'-\alpha'\delta+\beta'\gamma-\beta\gamma')+\gamma\delta'-\gamma'\delta=0,\end{aligned}$$

vbi coëfficientes iam iidem prodeunt, ac pro vltima aequatione differentiali §. 2. ſola differentialia ipſius y inuoluente,

 uente,

uente, vnico tantum cum diſcrimine, quod hic coëfficientes alternatim ſint poſitiui et negatiui, omnibus ibi poſitiuis exiſtentibus. Inuentis vero quatuor valoribus ipſius λ, inde quatuor huiusmodi prodibunt aequationes:

$$x\,dy + m\,x\,dz + A\,y + B\,z = C\,x^{n};$$
$$x\,dy + m'\,x\,dz + A'\,y + B'\,z = C'\,x^{n'}$$
$$x\,dy + m''\,x\,dz + A''\,y + B''\,z = C''\,x^{n''};$$
$$x\,dy + m'''\,x\,dz + A'''\,y + B'''\,z = C'''\,x^{n'''};$$

ex quibus, ſucceſſiue elidendo $x\,dy$, dz, et z, tandem pro y conſequemur aequationem huius formae:

$$y = D\,x^{n} + E\,x^{n'} + F\,x^{n''} + G\,x^{n'''},$$

vbi perſpicuum eſt fore

$$n = -(1+\lambda);\ n' = -(1+\lambda');$$
$$n'' = -(1+\lambda'');\ n''' = -(1+\lambda''').$$

§. 15. Quae in Diſſertatione priori monuimus de gradu, ad quem aequatio differentialis, ſola differentialia vnius vel alterius variabilium inuoluens, euehitur, heic quoque adplicari poſſunt. Scilicet aequatio iſta reſultans eius erit ordinis, qui aequatur ſummae ordinum omnium aequationum propoſitarum. Sic ſi propoſitae fuerint hae tres aequationes differentiales:

1°.) $x^2\,ddy + \alpha\,x\,dy + \beta\,x\,dz + \gamma\,x\,dv + \delta y + \varepsilon z + \zeta v = 0;$

2°.) $x\,dz + \mathfrak{d}\,y + \mathfrak{e}\,z + \mathfrak{f}\,v = 0;$

3°.) $x\,dv + \mathfrak{d}'\,y + \mathfrak{e}'\,z + \mathfrak{f}'\,v = 0;$

ordo aequationis reſultantis erit quarti gradus. Nam quum heic tres occurrant aequationes differentiales, in quibus

non

non niſi dv et v reperiuntur, vtroque eliminato remanebunt binae aequationes differentiales ſecundi gradus, ſolis y et z affectae, ex quibus igitur per §. 2. reſultabit aequatio quarti gradus, ſola differentialia ipſius y vel z inuoluens.

§. 16. Hucusque non contemplati ſumus niſi aequationes differentiales, in quibus huiusmodi expreſſiones:

$$x^2\,ddy + \alpha x\,dy + \beta x\,dz + \gamma x + \delta y;$$
$$x^2\,ddz + \alpha' x\,dy + \beta' x\,dz + \gamma' x + \delta' y;$$

nihilo aequales ſtatuebantur; verum eodem negotio integratio perficietur, ſupponendo eas aequales functionibus quibusdam quantitatis x. At ſi ad praeſcriptum §. 2. tractentur binae iſtae aequationes:

$$\alpha^2\,ddy + \alpha x\,dy + \beta x\,dz + \gamma x + \delta y = X;$$
$$x^2\,ddz + \alpha' x\,dy + \beta' x\,dz + \gamma' x + \delta' y = X',$$

aequatio finalis, ſola differentialia ipſius y inuoluens, erit

$$\begin{aligned} & x^4 d^4 y + (4+\alpha+\beta') x^3 d^3 y + (2+2(\alpha+\beta)+\gamma+\delta'+\alpha\beta'-\alpha'\beta) x^2 ddy \\ & + (\alpha\beta'-\alpha'\beta+\alpha\delta'-\alpha'\delta+\beta'\gamma-\beta\gamma')\,x\,dy \\ & + (\gamma\delta'-\gamma'\delta)y = \\ & ddX + \lambda\,dX + \lambda'\,dX' + \mu X + \mu' X' = \\ & ddX + \beta'\,dX - \beta\,dX' + \delta' X - \delta X'. \end{aligned}$$

Licet autem hic nunc differentialia functionum X et X' in calculum ſint inducta, integratione tamen ea iterum elidentur. Sic ſi integrale aequationis propoſitae ſupponatur

$$x^{\lambda+1}(x^3 d^3 y + A x^2\,ddy + B x\,dy + C y) = D + V,$$

exi-

exiſtente V functione quapiam ipſius x, et differentiatione facta prodire:

$$x^4 d^4 y + (4 + \alpha + \beta') x^3 d^3 y + \ldots\ldots + (\gamma\delta' - \gamma'\delta) y = dV . x^{-\lambda},$$

habebitur

$$dV . x^{-\lambda} = ddX + \beta' dX - \beta dX' + \delta' X - \delta X',$$

hincque

$$dV = x^\lambda (ddX + \beta' dX - \beta dX' + \delta' X - \delta X').$$

Liquet autem eſſe

$$\int x^\lambda ddX = x^\lambda dX - \lambda \int x^{\lambda-1} dX dx,$$

tumque

$$\int x^\lambda dX = x^\lambda X - \lambda \int x^{\lambda-1} X dx,$$

quare erit:

$$\int x^\lambda ddX = x^\lambda dX - \lambda x^{\lambda-1} X dx + \lambda(\lambda - 1) dx \int x^{\lambda-2} X dx;$$

$$\beta' \int x^\lambda dX = \beta' x^\lambda X - \lambda \beta' \int x^{\lambda-1} X dx;$$

$$\beta \int x^\lambda X' dx = \beta x^\lambda X' - \lambda \beta \int x^{\lambda-1} X' dx;$$

ideoque iam prima integratione differentialia ddX et dX' ex calculo eliſa ſunt; tum vero denuo integrando facile liquet differentiale dX penitus elidi.

RECHER-

RECHERCHES,

SUR UN PROBLÈME DU

CALCUL DES PROBABILITÉS

Par

NICOLAS FUSS.

§. 1.

Le Problème, dont il s'agit, a été propoſé & réſolu par le célébre *Jaques Bernoulli*, dans ſon traité, *De arte conjectandi.* En voici l'énoncé:

Deux perſonnes *A* & *B* jouent enſemble avec un ſeul dez, & conviennent que chacun rejette le dez autant de fois qu'il a amené de points au premier jet, que celui-là gagnera une ſomme 1, qui aménera le plus de points dans tous les jets, & que, ſi l'un & l'autre obtiennent le même nombre de points, ils partageront également la ſomme propoſée; mais bientot *B*, l'un des joueurs, ennuyé du jeu, offre, au lieu de jetter le dez, de prendre 12 points pour ſa part, *A* y conſent, on demande lequel a la plus grande eſperance de gagner?

§. 2. Je n'ai pas eu l'occaſion de voir la ſolution de feu M. *Bernoulli*; tout ce que je ſçais de ce Problème ſe reduit à la ſimple notice que j'en ai trouvée dans un mémoire de M. *Mallet*, Profeſſeur d'Aſtronomie à Geneve, *ſur le calcul des Probabilités*, inſéré dans le Volume VII. des *Acta Helvetica*, où il eſt marqué que l'eſperance du joueur A eſt à celle de B comme 15295 à 15809. J'ai eu la curioſité de chercher moi-même la ſolution de ce Problème, & j'ai trouvé que l'eſperance de gagner du premier joueur eſt à celle de l'autre, non pas comme 15295 à 15809, mais comme 15295 à 15378. Cette différence dans les réſultats, quoique d'ailleurs de très peu de conſéquence, fait voir que ma ſolution diffère auſſi eſſentiellement de celle de M. *Bernoulli*, & c'eſt à cet égard qu'elle doit mériter quelque attention, quand même le Problème n'en méritoit aucune.

§. 3. Or la queſtion en elle même eſt des plus ſingulières dans ce genre, ſi-non par ſa difficulté, au moins par les Paralogiſmes qu'on riſque de faire & qu'on ne peut éviter qu'avec beaucoup de circonſpection dans le raiſonnement. Veut-on juger de l'eſperance des deux joueurs par le nombre des points que A peut-attendre de ſes jets, toutes les apparences ſont contre le joueur B avec ſes douze points. Car parce que le nombre de tous les points du dez eſt 21 & le nombre de ſes faces 6, la probabilité donne $\frac{21}{6} = \frac{7}{2}$ comme un terme moyen que le joueur A peut attendre de chaque jet, & il eſt facile à voir que

s'il

s'il jette 1, il a 1 point & 0 d'eſperance pour le ſuivant
- - 2 - 2 - - $\frac{7}{2}$ - - - - - 1 ſuiv.
- - 3 - 3 - - $\frac{14}{2}$ - - - - - 2 -
- - 4 - 4 - - $\frac{21}{2}$ - - - - - 3 -
- - 5 - 5 - - $\frac{28}{2}$ - - - - - 4 -
- - 6 - 6 - - $\frac{35}{2}$ - - - - - 5 -

21 - - $\frac{105}{2}$

ce qui donne le nombre des points que le joueur A peut attendre de tous les jets $=\frac{1}{6}(21+\frac{105}{2})=12\frac{1}{4}$, pendant que ſon compagnon B n'a que 12 points à lui. Cependant l'eſperance qu'a ce dernier, de gagner toute la ſomme fixée, ou la moitié au moins, eſt plus grande que celle de l'autre joueur A, ce qui pourroit paroître bien paradoxe.

§. 4. Cependant en conſidérant attentivement toutes les conditions dont les deux joueurs ſont convenus, en ſe rappellant: 1°.) que A ne gagne toute la ſomme qu'en amenant au-de-là de douze points, ſoit de peu ou de beaucoup; 2°.) qu'il ne gagne que la moitié en ne ſurpaſſant point, ou en amenant exactement les douze points; 3°.) qu'il perd tout en amenant par tous ſes jets un nombre quelconque au-deſſous de 12: on ſent bien que ces trois circonſtances changent entièrement l'état de la queſtion, & que, comme ce n'eſt pas chaque point de plus jetté par A, qui contribue à le faire gagner, ſon eſperance dépend bien du nombre de points qu'il aménera, mais non pas du nombre de ceux qu'il jette au-deſſus des douze points de B, qui outre cela ne court pas les riſques du hazard. Il faudra donc parcourir ſéparément tous les cas

qui peuvent avoir lieu, pour être en état de réſoudre le Problème, & d'aſſigner au juſte le rapport qu'il y a entre les eſperances des deux joueurs & qui, comme nous venons de voir, ne peut pas être tiré de la pluralité des points, que la probabilité ſemble promettre au joueur A.

§. 5. Mais avant que de toucher à la ſolution de ce Problème, il faudra entrer dans quelques recherches préliminaires ſur le jeu de dez en général en faiſant l'énumération de tous les cas qui peuvent avoir lieu, lorsqu'avec un nombre de dez donné on veut produire un nombre de points quelconque. Soit pour cet effet le nombre des dez $= n$, & puisque le nombre de ſes faces eſt 6, conſidérons l'Exanome:

$$P = z + z^2 + z^3 + z^4 + z^5 + z^6,$$

élevé à la n^{me} puiſſance

$$P^n = (z + z^2 + z^3 + z^4 + z^5 + z^6)^n;$$

et on ſçait qu'en développant cette puiſſance, chaque coëfficient de z marque de combien de façons ſon expoſant peut être la ſomme de n nombres. Application faite à nôtre Problème le coëfficient d'une puiſſance quelconque de z ſera le nombre des cas, l'expoſant ſera le nombre des points, & celui de tout l'Exanome P ſera celui des dez dont on ſe ſert.

§. 6. Il ſera bon de remarquer ici, que les termes extrèmes de la puiſſance développée P^n, ſçavoir x^n & x^{6n}, ont le même coëfficient, de même que les termes voiſins x^{n+1} & x^{6n-1}, & généralement tous les termes également éloignés du premier & du dernier. Ainſi le

nombre

nombre de points indéfini $6n - \lambda$ peut être amené en autant de façons que le nombre $n + \lambda$, qui eſt ſon complément à ſept fois le nombre des dez, c'eſt à dire à $7n$. Si donc, dans la puiſſance développée, le membre $x^{n+\lambda}$ eſt affecté par le coëfficient Λ, la lettre Λ marque, de combien de façons le nombre de points $n + \lambda$ & $6n - \lambda$, peut être amené avec n dez. Or le nombre de tous les cas poſſibles, ou bien la ſomme de toutes les façons, dont chaque nombre de points peut être jetté avec ces n dez, eſt égale, comme l'on ſçait, à la ſomme des membres de l'Exanome élevée à la n^{me} puiſſance, ſçavoir 6^n. Donc en diuiſant, par la ſomme de tous les cas poſſibles, le nombre des façons dont le nombre des points $n + \lambda$ ou $6n - \lambda$ peut être produit, on trouve la probabilité que ce nombre ſera jetté $= \frac{\Lambda}{6^n}$.

§. 7. Tout revient ici à déterminer la lettre Λ pour un expoſant indéfini $n + \lambda$ de z. Développons pour cet effet la puiſſance P^n, ce qui ſe fait le plus aiſement de la maniére ſuivante. Puiſque

$$P = z(1 + z + z^2 + z^3 + z^4 + z^5) = \frac{z(1 - z^6)}{1 - z},$$

il y a

$$P^n = \frac{z^n (1 - z^6)^n}{(1 - z)^n}.$$

Transformons la fraction $\frac{1}{(1 - z)^n}$ en une ſérie, auſſi bien que la puiſſance $(1 - z^6)^n$, & en faiſant uſage, pour les coëfficiens, des caractères introduits par M. *Euler*, nous aurons

 $\frac{1}{(1 - z)^n}$

$$\frac{1}{(1-z)^n} = 1 + \left(\frac{n}{1}\right) z + \left(\frac{n+1}{2}\right) z^2 + \left(\frac{n+2}{3}\right) z^3$$
$$+ \left(\frac{n+3}{4}\right) z^4 + \text{etc.}$$

& en multipliant par z^n,

$$\frac{z^n}{(1-z)^n} = z^n + \left(\frac{n}{1}\right) z^{n+1} + \left(\frac{n+1}{2}\right) z^{n+2}$$
$$+ \left(\frac{n+2}{3}\right) z^{n+3} + \text{etc. de même}$$

$$(1-z^6)^n = 1 - \left(\frac{n}{1}\right) z^6 + \left(\frac{n}{2}\right) z^{12} - \left(\frac{n}{3}\right) z^{18} + \left(\frac{n}{4}\right) z^{24} - \text{etc.}$$

En multipliant donc une de ces ſéries par l'autre, on trouvera facilement, pour chaque expoſant de z, le coëfficient qui lui répond.

§. 8. Pour trouver la valeur de Λ ſans paſſer par les coëfficiens précédens, reprénons la ſérie pour $\frac{z^n}{(1-z)^n}$, en rejettant tous les termes qui ne peuvent pas produire la puiſſance $z^{n+\lambda}$, qui eſt ſeule affectée par le coëfficient Λ, & en renverſant l'ordre de ſes termes nous aurons

$$\frac{z^n}{(1-z)^n} = \ldots \left(\frac{n+\lambda-1}{\lambda}\right) z^{n+\lambda} \ldots + \left(\frac{n+\lambda-7}{\lambda-6}\right) z^{n+\lambda-6} \ldots$$
$$+ \left(\frac{n+\lambda-13}{\lambda-12}\right) z^{n+\lambda-12} + \&c.$$

Donc, à cauſe de

$$(1-z^6)^n = \left(\frac{n}{0}\right) - \left(\frac{n}{1}\right) z^6 + \left(\frac{n}{2}\right) z^{12} - \left(\frac{n}{3}\right) z^{18} + \&c.$$

multiplication faite les termes qui contiennent la puiſſance $z^{n+\lambda}$ feront,

$$x^{n+\lambda} \left(\left(\frac{n+\lambda-1}{\lambda}\right) - \left(\frac{n}{1}\right) \left(\frac{n+\lambda-7}{\lambda-6}\right) + \left(\frac{n}{2}\right) \left(\frac{n+\lambda-13}{\lambda-12}\right) - \&c. \right)$$

donc

$$\Lambda = \left(\frac{n+\lambda-1}{\lambda}\right) - \left(\frac{n}{1}\right) \left(\frac{n+\lambda-7}{\lambda-6}\right) + \left(\frac{n}{2}\right) \left(\frac{n+\lambda-13}{\lambda-12}\right)$$
$$- \left(\frac{n}{3}\right) \left(\frac{n+\lambda-19}{\lambda-18}\right) + \&c.$$

ou

ou bien, on aura en vertu de la propriété de ces caractères, $\binom{\alpha}{\beta} = \binom{\alpha}{\alpha-\beta}$, démontrée par M. *Euler*, & en mettant $n + \lambda = \mu$,

$$\Lambda = \binom{\mu-1}{n-1} - \binom{n}{1}\binom{\mu-7}{n-1} + \binom{n}{2}\binom{\mu-13}{n-1} + \&c.$$

Moyennant cette expreſſion générale nous ſerons en état d'aſſigner pour chaque nombre de dez donné, de combien de façons on peut amener chaque nombre de points poſſible, comme on peut voir par les exemples ſuivans.

§. 9. Cas de deux dez

$$\Lambda = \binom{\mu-1}{1} - 2\binom{\mu-7}{1} + \binom{\mu-13}{1}$$

Pour 2 points	1 cas	Pour 8 points	7 − 2. 1 = 5 cas
- - 3 -	- 2 -	- - 9 -	- 8 − 2. 2 = 4 -
- - 4 -	- 3 -	- - 10 -	- 9 − 2. 3 = 3 -
- - 5 -	- 4 -	- - 11 -	- 10 − 2. 4 = 2 -
- - 6 -	- 5 -	- - 12 -	- 11 − 2. 5 = 1 -
- - 7 -	- 6 -		

La ſomme de tous les cas eſt $36 = 6^2$.

§. 10. Cas de trois dez.

$$\Lambda = \binom{\mu-1}{2} - 3\binom{\mu-7}{2} + 3\binom{\mu-13}{2} - \binom{\mu-19}{2}.$$

Points	Cas	Points	Cas	Points	Cas
3	1	9	28 − 3. 1 = 25	15	91 − 3. 28 + 3. 1 = 10
4	3	10	36 − 3. 3 = 27	16	105 − 3. 36 + 3. 3 = 6
5	6	11	45 − 3. 6 = 27	17	120 − 3. 45 + 3. 6 = 3
6	10	12	55 − 3. 10 = 25	18	136 − 3. 55 + 3. 10 = 1
7	15	13	66 − 3 15 = 21		
8	21	14	78 − 3. 21 = 15		

La ſomme de tous les cas eſt $216 = 6^3$

§. 11.

§. 11. Cas de quatre dez

$$\Lambda = \binom{\mu-1}{3} - 4\binom{\mu-7}{3} + 6\binom{\mu-13}{3} - 4\binom{\mu-19}{3} + \binom{\mu-25}{3}$$

μ	Λ	μ	Λ	μ	Λ
4	1	10	84 − 4. 1 = 80	16	455 − 4. 84 + 6. 1 = 125
5	4	11	120 − 4. 4 = 104	17	560 − 4. 120 + 6. 4 = 104
6	10	12	165 − 4. 10 = 125	18	680 − 4. 165 + 6. 10 = 80
7	20	13	220 − 4. 20 = 140	19	816 − 4. 220 + 6. 20 = 56
8	35	14	286 − 4. 35 = 146	20	969 − 4. 286 + 6. 35 = 35
9	56	15	364 − 4. 56 = 140	21	1140 − 4. 364 + 6. 56 = 20

μ	Λ
22	1330 − 4. 455 + 6. 84 − 4. 1 = 10
23	1540 − 4. 560 + 6. 120 − 4. 4 = 4
24	1771 − 4. 680 + 6. 165 − 4. 10 = 1

La ſomme de tous les cas eſt $1296 = 6^4$

Solution du Problème propoſé.

§. 12. Le joueur A, qui a concédé à B douze points d'avance, peut amener au premier jet ou l'as, ou le deux, ou le trois, - - - ou enfin le ſix. La probabilité qu'il jette l'un ou l'autre de ces ſix nombres eſt $= \frac{1}{6}$. Mais parce qu'il peut enſuite rejetter le dez autant de fois qu'il a amené de points au premier coup, pour déterminer ſon eſperance ſur le gain par tous les jets

ſoit pour le 1 jet ſon eſperance $= \frac{1}{6}a$
- - - 2 - - - - - $\frac{1}{6}b$
- - - 3 - - - - - $\frac{1}{6}c$
- - - 4 - - - - - $\frac{1}{6}d$
- - - 5 - - - - - $\frac{1}{6}e$
- - - 6 - - - - - $\frac{1}{6}f$

de

& l'eſperance entière du joueur A devient

$$s = \tfrac{1}{6}(a + b + c + d + e + f).$$

Pour déterminer la valeur des lettres a, b, c, d, e, f, il faudra diſtinguer & réſoudre les cas ſuivans.

§. 13. Si le joueur A n'amène que l'As par le premier jet, il ne pourra plus rejetter le dez, & n'ayant qu'un ſeul point contre douze, il perd, & partant ſon eſperance eſt nulle, c'eſt à dire $a = 0$.

§. 14. Si le premier jet donne le Deux, A aura encore un jet à faire. Mais ne pouvant attendre du ſecond coup que 6 points tout-au-plus, il n'auroit en tout que 8 points contre 12. Donc il perd encore dans ce cas-ci; il y a par conſéquent $b = 0$.

§. 15. Si A jette le Trois au premier coup, il a encore deux jets de réſerve, ou bien il pourra faire le ſecond jet avec deux dez à la fois; & parce qu'il n'a eu que trois points au premier jet, il faudra qu'il amène au-delà de 9 au ſecond jet. S'il ne jette que 9, il prend la moitié de la ſomme 2 M, étant de pair avec B. Ce nombre 9 peut être amené de 4 façons avec deux dez, comme nous avons vu §. 9. Donc, la ſomme de tous les cas poſſibles étant $= 6^2$, la probabilité que ce nombre 9 ſera jetté, eſt $= \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$, & partant l'éſperance ſur la moitié de la miſe M ſera $\frac{1}{9}$ M. Mais ſi le ſecond coup produit le nombre 10, ou 11, ou 12, A gagne tout.

La table donnée ci-deſſus pour le cas de deux dez fait voir que pour le nombre 10 il y a trois cas, pour 11 deux cas & un ſeul cas pour 12. Il peut donc arriver de ſix façons que A gagne, & partant la probabilité en eſt $\frac{6}{6^2}$; & l'éſperance du gain entier $c = (\frac{1}{3} + \frac{1}{9})\,M = \frac{4}{9}\,M$.

§. 16. S'il amène le Quatre, il a encore trois jets à faire, ou, ce qui revient au même, il jouera encore une fois avec trois dez. En jettant 8 points il eſt de pair avec B & gagne la moitié M; mais en amenant au-delà de 8, il gagne toute la ſomme 2 M. Pour le premier cas il y a 21 & en général 6^3 cas poſſibles. La probabilité du jet eſt donc $\frac{21}{6^4}$ & l'éſperance ſur la moitié, du gain $\frac{21}{6^3}$ M. La ſomme des cas, où le joueur peut amener au-delà de 8 points eſt $6^3 - 56$, & par conſéquent ſon eſperance $\frac{6^3 - 56}{6^3} \cdot 2\,M$. Nous aurons donc $d = \frac{21 - 2\,(6^3 - 56)}{6^3} \cdot M$.

§. 17. En jettant le Cinq nôtre joueur A fera le ſecond coup avec quatre dez, & il aménera 7 points pour être de pair avec B, & parceque ce nombre de points peut être produit de 20 façons différentes avec quatre dez, l'éſperance qu'il a de gagner la moitié, ou de ne perdre pas, ſera $\frac{20}{6^4}$ M. Le nombre des cas, où il peut gagner toute la ſomme 2 M, eſt $6^4 - 35$, & la probabilité $\frac{6^4 - 35}{6^4}$, qui multipliée par 2 M & ajoutée à $\frac{20}{6^4}$ M, donne l'eſperance

$$c = \frac{20 + 2\,(6^4 - 35)}{6^4}\,M.$$

§. 18. Enfin le nombre Six, amené au premier jet, procure au joueur A la permiſſion de jouer la ſeconde fois avec cinq

cinq dez. La probabilité qu'il aura encore 6 points, à cauſe des 5 cas qui peuvent avoir lieu, ſera $\frac{5}{6^5}$. La ſomme des cas poſſibles, où A peut jetter au-delà de 6, étant $6^5 - 6$, la probabilité ſera $\frac{6^5 - 6}{6^5}$; celle-ci, multipliée par 2 M, & ajoutée à l'autre, multipliée par M, nous fournit la lettre f, ſçavoir

$$f = \frac{(5 + 2(6^5 - 6)}{6^5} M.$$

§. 19. Ayant déterminé de cette façon les lettres a, b, c, &c. il ſera facile d'aſſigner l'éſperance entière du joueur A, qui étoit $s = \frac{1}{6}(c + d + e + f)$ (à cauſe de $a = b = 0$). Car puiſque

$$c = \frac{4}{9} M$$
$$d = \frac{21 + 2(6^3 - 56)}{6^3} M = (2 - \frac{91}{6^3}) M$$
$$e = \frac{20 + 2(6^4 - 35)}{6^4} M = (2 - \frac{50}{6^4}) M$$
$$f = \frac{5 + 2(6^5 - 6)}{6^5} M = (2 - \frac{7}{6^5}) M$$

nous aurons

$$s = \frac{1}{6}(2 + 2 + 2 + \frac{4}{9} - \frac{91}{6^3} - \frac{50}{6^4} - \frac{7}{6^5}) M$$

ou bien

$$s = \frac{1}{6}(6 - \frac{127}{6^5}) M = (1 - \frac{127}{6^6}) M.$$

§. 20. Nous voyons donc maintenant que l'eſperance de A eſt effectivement plus petite que celle de B, qui eſt

$$2 M - s = (1 + \frac{127}{6^6}) M.$$

De ſorte que A n'a de l'éſperance que ſur la moitié de

la ſomme 2 M, diminuée de la partie $\frac{127}{6^6} = \frac{127}{46656}$, au lieu que B a l'éſperance ſur la moitié du jeu augmentée de cette partie 368me. L'éſperance de A eſt donc à celle de B comme $1 - \frac{127}{6^6} : 1 + \frac{127}{6^6}$, ou bien comme

$$46529 : 46783 = 15295 : 15378.$$

Raiſon qui diffère aſſés ſenſiblement de celle que feu M. *Bernoulli* doit avoir trouvée.

PHYSI-

PHYSICO-
MATHEMATICA.

DE

DE

MOTV OSCILLATORIO PENDVLORVM EX FILO TENSO DEPENDENTIVM.

Auctore
L. EVLERO.

§. 1.

Concipiamus filum A E F B, in punctis A et B fixum, cui in punctis E et F appenſa ſint pendula E M et F N, quorum motum definiri oportet, poſtquam de ſtatu aequilibrii vtcunque fuerint deturbata, cuiusmodi autem motus tanquam minimos ſpectamus, ſimulque a grauitate ipſius fili mentem abſtrahimus, ita vt tantum maſſae duorum ponderum M et N in calculum ingrediantur. Tab. I. Fig. 1.

§. 2. Primum igitur conſideremus ſtatum aequilibrii, ac ponamus fili portiones A E $= a$, E F $= b$, F B $= c$; anguli autem, quibus hae portiones ad horizontalem A C inclinantur, ſint α, β et γ; tum vero longitudinem pendulorum vocemus E M $= m$ et F N $= n$, dum

dum eorum pondera literis M et N exprimuntur. Hinc igitur erit recta horizontalis

$$A C = a \text{ coſ. } \alpha + b \text{ coſ. } \beta + c \text{ coſ. } \gamma$$

recta vero verticalis

$$C B = a \text{ ſin. } \alpha + b \text{ ſin. } \beta + c \text{ ſin. } \gamma.$$

§. 3. Ponamus nunc ſtatum aequilibrii ita eſſe turbatum, vt anguli α, β, γ, incrementa ceperint infinite parva ω, ω' et ω'', et quia illa intervalla A C et B C manent immutata, habebimus has duas aequationes:

$$a\,\omega \text{ ſin. } \alpha + b\,\omega' \text{ ſin. } \beta + c\,\omega'' \text{ ſin. } \gamma = 0, \text{ et}$$

$$a\,\omega \text{ coſ. } \alpha + b\,\omega' \text{ coſ. } \beta + c\,\omega'' \text{ coſ. } \gamma = 0.$$

ſicque ſtatim atque vnicus horum angulorum ω, ω', ω'' fuerit datus, bini reliqui ſimul determinantur.

§. 4. Sumamus nunc ambo pendula E M et F N de ſitu verticali declinare angulis Φ et Φ', itidem quam minimis, ac ductis inde ad verticalem horizontalibus M m et N n, vocemus quaſi-coordinatas

$$A\,m = x \text{ et } m\,M = y;\ A\,n = x' \text{ et } n\,N = y'$$

eritque

$$x = a \text{ ſin. } (\alpha + \omega) + m \text{ coſ. } \Phi = a \text{ ſin. } \alpha + a\,\omega \text{ coſ. } \alpha + m \text{ et}$$

$$y = a \text{ coſ. } (\alpha + \omega) + m \text{ ſin. } \Phi = a \text{ coſ. } \alpha - a\,\omega \text{ ſin. } \alpha + m\,\Phi$$

deinde

$$x' = a \text{ ſin. } (\alpha + \omega) + b \text{ ſin. } (\beta + \omega') + n \text{ coſ. } \Phi'$$
$$= a \text{ ſin. } \alpha + a\,\omega \text{ coſ. } \alpha + b \text{ ſin. } \beta + b\,\omega' \text{ coſ. } \beta + n$$

$$y' = a \text{ coſ. } (\alpha + \omega) + b \text{ coſ. } (\beta + \omega') + n \text{ ſin. } \Phi'$$
$$= a \text{ coſ. } \alpha - a\,\omega \text{ ſin. } \alpha + b \text{ coſ. } \beta - b\,\omega' \text{ ſin. } \beta + n\,\Phi'.$$

§. 5.

§. 5. Quia nunc pondera M et N primum verticaliter deorſum vrgentur, viribus M et N, fila autem EM et FN aequalibus viribus tenduntur, vires verticales ſe mutuo deſtruunt. Horizontaliter autem pondera ad axem AB pelluntur, viribus $M\Phi$ et $N\Phi'$, ſicque ex motus principiis erit

$$\frac{ddx}{2g\,dt^2} = 0,\quad \frac{ddy}{2g\,dt^2} = -\Phi,\quad \frac{ddx'}{2g\,dt^2} = 0 \text{ et } \frac{ddy'}{2g\,dt^2} = -\Phi',$$

vnde reſtitutis valoribus habebimus has quatuor aequationes:

$$\text{I. } +\frac{a\,dd\,\omega\,\text{coſ.}\,\alpha}{2g\,dt^2} = 0.$$

$$\text{II. } -\frac{a\,dd\,\omega\,\text{ſin.}\,\alpha + m\,dd\,\Phi}{2g\,dt^2} = -\Phi.$$

$$\text{III. } +\frac{a\,dd\,\omega\,\text{coſ.}\,\alpha + b\,dd\,\omega'\,\text{coſ.}\,\beta}{2g\,dt^2} = 0.$$

$$\text{IV. } -\frac{a\,dd\,\omega\,\text{ſin.}\,\alpha - b\,dd\,\omega'\,\text{ſin.}\,\beta + n\,dd\,\Phi'}{2g\,dt^2} = -\Phi'.$$

§. 6. Ex harum aequationum prima et tertia neutiquam concludere licet fore tam $\frac{ddx}{2g\,dt^2}$ quam $\frac{ddx'}{2g\,dt^2} = 0$; plus enim inde non ſequitur, quam tenſionem filorum EM et FN non exacte ponderibus M et N eſſe aequalem. Si enim ponamus tenſionem fili $EM = P$ et fili $FN = Q$, hae aequationes ita ſe habebunt:

$$\text{I. } \frac{a\,dd\,\omega\,\text{coſ.}\,\alpha}{2g\,dt^2} = 1 - \frac{P}{M} \text{ et}$$

$$\text{III. } \frac{a\,dd\,\omega\,\text{coſ.}\,\alpha + b\,dd\,\omega'\,\text{coſ.}\,\beta}{2g\,dt^2} = 1 - \frac{Q}{N},$$

quae formulae cum ſint quaſi infinite paruae, erit vtique proxime $P = M$ et $Q = N$; quibus valoribus in aequatione ſecunda et quarta ſine errore vti licet, quia ibi per quantitates minimas Φ et Φ' ſunt multiplicatae.

§. 7. Ad has ergo aequationes reſoluendas vtamur methodo iam aliquoties adhibita, dum ſcilicet angulis variabilibus ω, ω', ω''; Φ et Φ', rationem conſtantem tribuimus, vt eorum mutationes ad motum penduli ſimplicis reuocentur, cuius longitudo ſit $= r$; motus vero hac aequatione exprimatur: $\frac{ddz}{2g\,dt^2} = -\frac{z}{r}$, et iam ponamus

$$\omega = \mathfrak{A}z,\ \omega' = \mathfrak{B}z,\ \omega'' = \mathfrak{C}z,\ \Phi = \mathfrak{M}z \text{ et } \Phi' = \mathfrak{N}z,$$

hincque ergo fiet

$$\frac{dd\omega}{2g.dt^2} = -\frac{\mathfrak{A}z}{r};\quad \frac{dd\omega'}{2g.dt^2} = -\frac{\mathfrak{B}z}{r};$$
$$\frac{dd\Phi}{2g\,dt^2} = -\frac{\mathfrak{M}z}{r};\quad \frac{dd\Phi'}{2g.dt^2} = -\frac{\mathfrak{N}z}{r}.$$

§. 8. His igitur valoribus ſubſtitutis nanciſcimur ſequentes aequationes ſimplices:

$$\text{I} - \frac{\mathfrak{A}.a\,z\,coſ.\alpha}{r} = 1 - \frac{P}{M},$$
$$\text{II} + \frac{\mathfrak{A}\,a\,z\,ſin.\alpha - \mathfrak{M}.m\,z}{r} = -\mathfrak{M}z,$$
$$\text{III} - \frac{\mathfrak{A}\,a\,z\,coſ.\alpha - \mathfrak{B}\,b\,z\,coſ.\beta}{r} = 1 - \frac{Q}{N},$$
$$\text{IV} + \frac{\mathfrak{A}\,a\,z\,ſin.\alpha + \mathfrak{B}\,b\,z\,ſin.\beta - \mathfrak{N}\,n\,z}{r} = -\mathfrak{N}z,$$

ex quarum prima et tertia deducimus tenſiones P et Q, quae ſunt:

$$P = M + \frac{\mathfrak{A}\,a\,z\,M\,coſ.\alpha}{r};\quad Q = N + \frac{Nz}{r}(\mathfrak{A}\,a\,coſ.\alpha + \mathfrak{B}\,b\,coſ.\beta);$$

ex ſecunda vero et quarta deducimus

$$\mathfrak{M} = \frac{\mathfrak{A}\,a\,ſin.\beta}{m - r} \text{ et } \mathfrak{N} = \frac{\mathfrak{A}\,a\,ſin.\alpha + \mathfrak{B}\,b\,ſin.\beta}{n - r}.$$

§. 9. Hos eosdem valores etiam ſubſtituamus in binis formulis, quae ſupra, ob puncta A et B fixa, ſunt datae; vnde duas ſequentes nanciſcimur aequationes:

$\mathfrak{A}\,a$

$$\mathfrak{A}\,a\,\text{ſin.}\,\alpha + \mathfrak{B}\,b\,\text{ſin.}\,\beta + \mathfrak{C}\,c\,\text{ſin.}\,\gamma = 0 \text{ et}$$

$$\mathfrak{A}\,a\,\text{coſ.}\,\alpha + \mathfrak{B}\,b\,\text{coſ.}\,\beta + \mathfrak{C}\,c\,\text{coſ.}\,\gamma = 0$$

ex quibus, eliminando $\mathfrak{C}$, elicimus

$$\mathfrak{A}\,a\,\text{ſin.}\,(\alpha - \gamma) + \mathfrak{B}\,b\,\text{ſin.}\,(\beta - \gamma) = 0,$$

hincque porro

$$\mathfrak{B} = + \frac{\mathfrak{A}\,a\,\text{ſin.}\,(\alpha - \gamma)}{b\,\text{ſin.}\,(\gamma - \beta)} \text{ et } \mathfrak{C} = \frac{\mathfrak{A}\,a\,\text{ſin.}\,(\alpha - \beta)}{c\,\text{ſin.}\,(\beta - \gamma)},$$

vnde ſequentes formamus valores concinniores:

$$\mathfrak{A}a = f\,\text{ſin.}\,(\beta - \gamma);\ \mathfrak{B}b = f\,\text{ſin.}\,(\gamma - \alpha) \text{ et } \mathfrak{C}c = f\,\text{ſin.}\,(\alpha - \beta).$$

§. 10. Quodſi hos valores in praecedentes introducamus, fiet

$$P = M + \frac{Mfz}{r}\,\text{ſin.}\,(\beta - \gamma)\,\text{coſ.}\,\alpha \text{ et}$$

$$Q = N - \frac{Nfz}{r}\,\text{ſin.}\,(\alpha - \beta)\,\text{coſ.}\,\gamma;$$

tum vero

$$\mathfrak{M} = \frac{f\,\text{ſin.}\,(\beta - \gamma)\,\text{ſin.}\,\alpha}{m - r} \text{ et } \mathfrak{N} = \frac{-f\,\text{ſin.}\,(\alpha - \beta)\,\text{ſin.}\,\gamma}{n - r}.$$

§. 11. Supereſt autem, vt etiam motus fili rationem in computum ducamus; in quo cum nullam inertiam admittamus, vires, quibus puncta E et F ſollicitantur, ſe mutuo deſtruere debent; haec autem puncta, praeter tenſionem filorum P et Q, potiſſimum a tenſione fili ſollicitantur. Hunc in finem ponamus tenſionem fili A E = A, fili E F = B et fili F B = C, quas vires ſecundum directiones verticalem et horizontalem reſoluere oportet. Hinc igitur punctum E horizontaliter ſiniſtrorſum trahetur his viribus:

$$\text{I. } A\,\text{coſ.}\,(\alpha + \omega) - B\,\text{coſ.}\,(\beta + \omega') + P\,\text{ſin.}\,\phi = 0,$$

verticaliter autem ſurſum trahitur his viribus:

$$\text{II. } A \text{ ſin.}\,(\alpha + \omega) - B \text{ ſin.}\,(\beta + \omega') - P \text{ coſ.}\,\Phi = 0.$$

Punctum autem F horizontaliter ſiniſtrorſum trahitur his viribus:

$$\text{III. } B \text{ coſ.}\,(\beta + \omega') - C \text{ coſ.}\,(\gamma + \omega'') + Q \text{ ſin.}\,\Phi' = 0;$$

verticaliter autem ſurſum, his:

$$\text{IV. } B \text{ ſin.}\,(\beta + \omega') - C \text{ ſin.}\,(\gamma + \omega'') - Q \text{ coſ.}\,\Phi' = 0.$$

§. 12. Reſoluamus iam iſtos angulos, ſimulque loco ω, ω', ω''; Φ et Φ' ſuos valores aſſumtos ſcribamus, et obtinebemus ſequentes formas:

$$\text{I. } A \text{ coſ}\,\alpha - B \text{ coſ.}\,\beta - A\mathfrak{A}z \text{ ſin.}\,\alpha + B\mathfrak{B}z \text{ ſin.}\,\beta + P\mathfrak{M}z = 0.$$

$$\text{II. } A \text{ ſin.}\,\alpha - B \text{ ſin.}\,\beta + A\mathfrak{A}z \text{ coſ.}\,\alpha - B\mathfrak{B}z \text{ coſ.}\,\beta - P = 0.$$

$$\text{III. } B \text{ coſ.}\,\beta - C \text{ coſ.}\,\gamma - B\mathfrak{B}z \text{ ſin.}\,\beta + C\mathfrak{C}z \text{ ſin.}\,\gamma + Q\mathfrak{N}z = 0.$$

$$\text{IV. } B \text{ ſin.}\,\beta - C \text{ ſin.}\,\gamma + B\mathfrak{B}z \text{ coſ.}\,\beta - C\mathfrak{C}z \text{ coſ.}\,\gamma - Q = 0.$$

§. 13. Quia autem praecipuum negotium in hoc verſatur, vt tenſiones A, B, C ex calculo exterminemus, potius vtamur formis prioribus, vtpote ſimplicioribus; ac primo quidem ex prima et ſecunda literam A definiamus hoc modo:

$$A = \frac{B \text{ coſ.}\,(\beta + \omega') - P\Phi}{\text{coſ.}\,(\alpha + \omega)} = \frac{B \text{ ſin.}\,(\beta + \omega') - P}{\text{ſin.}\,(\alpha + \omega)},$$

ex quo duplici valore colligimus:

$$B = \frac{P(\text{coſ.}\,(\alpha + \omega) + \Phi \text{ ſin.}\,(\alpha + \omega))}{\text{ſin.}\,(\alpha - \beta + \omega - \omega')}.$$

Eodem modo ex tertia et quarta eliciamus valores literae C, qui ſunt

$$C = \frac{B \text{ coſ.}\,(\beta + \omega') + Q\Phi'}{\text{coſ.}\,(\gamma + \omega'')} = \frac{B \text{ ſin.}\,(\beta + \omega') - Q}{\text{ſin.}\,(\gamma + \omega'')},$$

vnde deducimus ſequentem valorem:

$$B = \frac{Q(\text{coſ.}\,(\gamma + \omega'') + \Phi' \text{ ſin.}\,(\gamma + \omega''))}{\text{ſin.}\,(\beta - \gamma + \omega' - \omega'')}.$$

Quod ſi iam hi duo valores ipſius P inter ſe aequentur, obtine-

obtinebimus aequationem finalem, ex qua quantitatem r determinari oportebit.

§. 14. Quoniam vero initio angulos α, β, γ, ita aſſumſimus, vt, dum pondera M et N verticaliter dependent, ſtatus aequilibrii reſultet, noſtrum calculum ad iſtum ſtatum aequilibrii facillime accommodabimus, ſi modo angulos ω, ω' et ω'', vna cum angulis Φ et Φ' nullos ſtatuamus, tum vero loco P et Q ipſa pondera M et N ſcribamus, quo facto bini valores, qui pro B eſſent prodituri, erunt

$$B = \frac{M\, coſ.\, \alpha}{ſin.\, (\alpha - \beta)} \text{ et } B = \frac{N\, coſ.\, \gamma}{ſin.\, (\beta - \gamma)},$$

quibus aequatis habebimus hanc aequationem pro ſtatu aequilibrii

$$M\, coſ.\, \alpha\, ſin.\, (\beta - \gamma) = N\, coſ.\, \gamma.\, ſin.\, (\alpha - \beta)$$

quae reducitur ad hanc formam:

$$M\, (ſin.\, (\alpha + \beta - \gamma) - ſin.\, (\alpha - \beta + \gamma))$$
$$= N\, (ſin.\, (\alpha - \beta + \gamma) + ſin.\, (\alpha - \beta - \gamma)).$$

§. 15. Euidens nunc eſt, ex hac aequatione euoluta eam, quae ex ſuperiori noſtra aequatione oriretur, immediate formari poſſe, ſi loco angulorum α, β, γ, ſcribantur $(\alpha + \omega)$, $(\beta + \omega')$, $(\gamma + \omega'')$; deinde vero loco M ſcribi debebit $P + P\, \Phi\, tang.\, (\alpha + \omega)$; at vero loco N ſcribere debebimus $Q + Q\, \Phi'\, tang.\, (\gamma + \omega'')$. Quia vero ſupra inuenimus

$$P = M + \frac{M f z}{r}\, ſin.\, (\beta - \gamma)\, coſ.\, \alpha \text{ et}$$
$$Q = N - \frac{N f z}{r}\, ſin.\, (\alpha - \beta)\, coſ.\, \gamma,$$

nunc autem eſt $\Phi = M z$, loco $tang.\, (\alpha + \omega)$ ſcribere ſufficit $tang.\, \alpha$, ita vt nunc ſufficiat loco M ſcribere formulam

$$\mathrm{M} + \frac{\mathrm{M} f z}{r} \text{ſin.} (\beta - \gamma) \text{ coſ.} \alpha + \mathrm{M} \mathfrak{M} z \text{ tang.} \alpha.$$

Eodem modo loco N ſcribi conueniet hanc formulam:

$$\mathrm{N} - \frac{\mathrm{N} f z}{r} \text{ſin.} (\alpha - \beta) \text{ coſ.} \gamma + \mathrm{N} \mathfrak{N} z \text{ tang.} \gamma.$$

§. 16. Facillime igitur noſtram aequationem finalem impetrabimus, ſi aequationem ex ſtatu aequilibrii deductam, quae erat

$$\mathrm{M} \text{ coſ.} \alpha \text{ ſin.} (\beta - \gamma) = \mathrm{N} \text{ coſ.} \gamma \text{ ſin.} (\alpha - \beta),$$

differentiemus, omnibus literis M, N, α, β, γ, variabilibus ſumtis, ita ſcilicet vt ſit

$$d\alpha = \omega = \mathfrak{A} z = \frac{f z \text{ ſin.} (\beta - \gamma)}{a},$$

$$d\beta = \omega' = \mathfrak{B} z = \frac{f z \text{ ſin.} (\gamma - \alpha)}{b},$$

$$d\gamma = \omega'' = \mathfrak{C} z = \frac{f z \text{ ſin.} (\alpha - \beta)}{c},$$

$$d\mathrm{M} = \frac{\mathrm{M} f z}{r} \text{ ſin.} (\beta - \gamma) \text{ coſ.} \alpha + \mathrm{M} \mathfrak{M} z \text{ tang.} \alpha \text{ et}$$

$$d\mathrm{N} = - \frac{\mathrm{N} f z}{r} \text{ ſin.} (\alpha - \beta) \text{ coſ.} \gamma + \mathrm{N} \mathfrak{N} z \text{ tang.} \gamma.$$

Supra vero iam inuenimus

$$\mathfrak{M} = \frac{f \text{ ſin.} (\beta - \gamma) \text{ ſin.} \alpha}{m - r} \text{ et } \mathfrak{N} = - \frac{f \text{ ſin.} (\alpha - \beta) \text{ ſin.} \gamma}{n - r}.$$

Hi igitur valores in aequatione illa differentiata ſubſtitui debent, quae ita ſe habet

$$d\mathrm{M} \text{ coſ.} \alpha \text{ ſin.} (\beta - \gamma) - \mathrm{M}\, d\alpha \text{ ſin.} \alpha \text{ ſin.} (\beta - \gamma)$$
$$+ \mathrm{M} (d\beta - d\gamma) \text{ coſ.} \alpha \text{ coſ.} (\beta - \gamma) =$$
$$d\mathrm{N} \text{ coſ.} \gamma \text{ ſin.} (\alpha - \beta) - \mathrm{N}\, d\gamma \text{ ſin.} \gamma \text{ ſin.} (\alpha - \beta)$$
$$+ \mathrm{N} (d\alpha - d\beta) \text{ coſ.} \gamma \text{ coſ.} (\alpha - \beta).$$

Calculus autem nimis fieret prolixus, ſi hos valores actu ſubſtituere vellemus. Sufficiat autem hic obſeruaſſe, quantitatem r ex iſta aequatione determinari poſſe, quandoquidem, facta euolutione, totum negotium ad aequationem cubicam reducetur.

Appli-

Applicatio ad exemplum.

Tab. I. Fig. 2.

§. 17. Sumamus primo puncta A et B, in quibus filum eſt fixum, in eadem recta horizontali eſſe ſita; deinde ſint portiones fili AE, EF, FB, inter ſe aequales, ita vt ſit $b = a$ et $c = a$; tertio ſit in ſtatu aequilibrii portio media EF horizontalis, ita vt ſit $\beta = 0$; hinc ergo manente angulo $BAE = \alpha$, fiet angulus $\gamma = -\alpha$, vnde ſequitur interuallum $AB = 2a \operatorname{coſ.} \alpha + a$. His poſitis aequatio pro ſtatu aequilibrii dabit

$$M \operatorname{coſ.} \alpha \operatorname{ſin.} \alpha = N \operatorname{coſ.} \alpha \operatorname{ſin.} \alpha$$

vnde patet, pondera M et N inter ſe eſſe debere aequalia; pendulorum autem longitudines m et n maneant adhuc indeterminatae.

§. 18. His ergo conſtitutis, valores differentialium ſequenti modo definientur:

$$d\alpha = \frac{fz \operatorname{ſin.} \alpha}{a};\ d\beta = -\frac{fz \operatorname{ſin.} 2\alpha}{a};\ d\gamma = \frac{fz \operatorname{ſin.} \alpha}{a},$$
$$dM = \frac{Mfz}{r} \operatorname{ſin.} \alpha \operatorname{coſ.} \alpha + \frac{Mfz \operatorname{ſin.} \alpha^2 \operatorname{tang.} \alpha}{m - r},$$
$$dN = -\frac{Mfz}{r} \operatorname{ſin.} \alpha \operatorname{coſ.} \alpha - \frac{Mfz \operatorname{ſin.} \alpha^2 \operatorname{tang.} \alpha}{n - r}.$$

Quod ſi igitur hi valores in aequatione differentiali ſupra exhibita ſubſtituantur, in ſingulis terminis occurret factor Mfz, quem ergo omittamus, vnde iſta aequatio ſequentem induet formam:

$$\left(\frac{\operatorname{ſin.} \alpha \operatorname{coſ.} \alpha}{r} + \frac{\operatorname{ſin.} \alpha^2 \operatorname{tang.} \alpha}{m - r}\right) \operatorname{ſin.} \alpha \operatorname{coſ.} \alpha - \frac{\operatorname{ſin.} \alpha^3}{a} - \frac{\operatorname{coſ.} \alpha^2 (\operatorname{ſin.} 2\alpha + \operatorname{ſin.} \alpha)}{a}$$
$$= -\left(\frac{\operatorname{ſin.} \alpha \operatorname{coſ.} \alpha}{r} + \frac{\operatorname{ſin.} \alpha^2 \operatorname{tang.} \alpha}{n - r}\right) \operatorname{ſin.} \alpha \operatorname{coſ.} \alpha + \frac{\operatorname{ſin.} \alpha^3}{a}$$
$$+ \frac{\operatorname{coſ.} \alpha^2 (\operatorname{ſin.} 2\alpha + \operatorname{ſin.} \alpha)}{a},$$

quae euoluta abit in formam ſequentem:

3 ſin.

$$\frac{ſin.\,\alpha^2 \,coſ.\,\alpha^2}{r} + \frac{ſin.\,\alpha^4}{m-r} + \frac{ſin.\,\alpha^4}{n-r} - \frac{2\,ſin.\,2\,\alpha\,coſ.\,\alpha^2}{a} - \frac{2\,ſin.\,\alpha\,coſ.\,\alpha^2}{a} = 0,$$

ex qua aequatione noſtram incognitam r quaeri oportet.

§. 19. Quod ſi iam vtrique pendulo eandem tribuamus longitudinem, vt ſit $n = m$, aequatio noſtra fiet

$$\frac{ſin.\,\alpha^2\,coſ.\,\alpha^2}{r} + \frac{ſin.\,\alpha^4}{m-r} - \frac{ſin.\,2\,\alpha\,coſ.\,\alpha^2}{a} - \frac{ſin.\,\alpha\,coſ.\,\alpha^2}{a} = 0,$$

quae reducitur ad hanc formam:

$$\frac{m\,ſin.\,\alpha^2\,coſ.\,\alpha^2 - r\,ſin.\,\alpha^2\,coſ.\,2\,\alpha}{r\,(m-r)} = \frac{ſin.\,2\,\alpha\,coſ.\,\alpha^2 + ſin.\,\alpha\,coſ.\,\alpha^2}{a}$$
$$= \frac{coſ.\,\alpha^2\,(ſin.\,2\,\alpha + ſin.\,\alpha)}{a},$$

hincque porro fit

$$a\,m\,ſin.\,\alpha^2\,coſ.\,\alpha^2 - a\,r\,ſin.\,\alpha^2\,coſ.\,2\,\alpha$$
$$= r\,(m-r)\,coſ.\,\alpha^2\,(ſin.\,2\,\alpha + ſin.\,\alpha),$$

quae aequatio iam tantum eſt quadratica, cum praecedens ad tertium gradum aſcendiſſet.

§. 20. Cum igitur caſu, quo ambo pendula longitudinem habent inaequalem, perueniatur ad aequationem cubicam, ponamus eius tres radices eſſe 1°) $r = k$; 2°) $r = k'$; 3°) $r = k''$; ex quibus triplex motus regularis oritur, quorumque ſinguli ſolutionem ſpecialem noſtri problematis exhibent, quarum vnam euoluiſſe ſufficiet, ex radice $r = k$ oriundam: Pro binis reliquis enim tantum opus eſt loco k vel k' vel k'' ſcribere. Cum igitur ex aequatione differentio-differentiali aſſumta ſit $z = ſin.\,(\zeta + t\sqrt{\frac{2g}{r}})$, denotante ζ angulum conſtantem quemcunque, erit ad quoduis tempus, tam pro ſitu fili quam amborum corporum M et N, vt ſiquitur:

$$\omega = \frac{f\,z\,ſin.\,\alpha}{a} = \frac{f}{a}\,ſin.\,\alpha\,ſin.\,(\zeta + t\sqrt{\frac{2g}{k}});$$

$\omega' =$

$$\omega' = -\tfrac{f}{a}\ \text{ſin.}\ 2\,\alpha\ \text{ſin.}\ (\zeta + t\sqrt{\tfrac{2g}{k}});$$

$$\omega'' = \tfrac{f}{a}\ \text{ſin.}\ \alpha\ \text{ſin.}\ (\zeta + t\sqrt{\tfrac{2g}{k}};$$

$$\Phi = \tfrac{f}{m-k}\ \text{ſin.}\ \alpha^2\ \text{ſin.}\ (\zeta + t\sqrt{\tfrac{2g}{k}})\ \text{et}$$

$$\Phi' = \tfrac{f}{n-k}\ \text{ſin.}\ \alpha^2\ \text{ſin.}\ (\zeta + t\sqrt{\tfrac{2g}{k}}),$$

quibus formulis totus motus, tam fili quam pendulorum appenſorum, pro radice $r = k$ definitur.

§. 21. Similes igitur formulae etiam pro reliquis radicibus $r = k'$ et $r = k''$ prodibunt, in quibus quidem loco anguli conſtantis ζ ſcribi conueniet ζ' et ζ''; ſimilique modo loco coefficientis f ſcribatur f' et f'', quo facto ſolutio generalis et completa, quae omnes plane motus in ſe complectatur, ſequenti modo exhiberi poterit:

$$\text{I.}\quad \omega = \tfrac{f}{a}\ \text{ſin.}\,\alpha\ \text{ſin.}\,(\zeta + t\sqrt{\tfrac{2g}{k}}) + \tfrac{f'}{a}\ \text{ſin.}\,\alpha\ \text{ſin.}\,(\zeta' + t\sqrt{\tfrac{2g}{k'}}) + \tfrac{f''}{a}\ \text{ſin.}\,\alpha\ \text{ſin.}\,(\zeta'' + t\sqrt{\tfrac{2g}{k''}}),$$

$$\text{II.}\quad \omega' = -\tfrac{f}{a}\ \text{ſin.}\,2\alpha\ \text{ſin.}\,(\zeta + t\sqrt{\tfrac{2g}{k}}) - \tfrac{f'}{a}\ \text{ſin.}\,2\alpha\ \text{ſin.}\,(\zeta' + t\sqrt{\tfrac{2g}{k'}}) - \tfrac{f''}{a}\ \text{ſin.}\,2\,\alpha\ \text{ſin.}\,(\zeta'' + t\sqrt{\tfrac{2g}{k''}}),$$

$$\text{III.}\quad \omega'' = \tfrac{f}{a}\ \text{ſin.}\,\alpha\ \text{ſin.}\,(\zeta + t\sqrt{\tfrac{2g}{k}}) + \tfrac{f'}{a}\ \text{ſin.}\,\alpha\ \text{ſin.}\,(\zeta' + t\sqrt{\tfrac{2g}{k'}}) + \tfrac{f''}{a}\ \text{ſin.}\,\alpha\ \text{ſin.}\,(\zeta'' + t\sqrt{\tfrac{2g}{k''}}),$$

$$\text{IV.}\quad \Phi = \tfrac{f}{m-k}\ \text{ſin.}\,\alpha^2\ \text{ſin.}\,(\zeta + t\sqrt{\tfrac{2g}{k}}) + \tfrac{f'}{m-k'}\ \text{ſin.}\,\alpha^2\ \text{ſin.}\,(\zeta' + t\sqrt{\tfrac{2g}{k'}}) + \tfrac{f''}{m-k''}\ \text{ſin.}\,\alpha^2\ \text{ſin.}\,(\zeta'' + t\sqrt{\tfrac{2g}{k''}}),$$

$$\text{V.}\quad \Phi' = \tfrac{f}{n-k}\ \text{ſin.}\,\alpha^2\ \text{ſin.}\,(\zeta + t\sqrt{\tfrac{2g}{k}}) + \tfrac{f'}{n-k'}\ \text{ſin}\ \alpha^2\ \text{ſin.}\,(\zeta' + t\sqrt{\tfrac{2g}{k'}}) + \tfrac{f''}{n-k''}\ \text{ſin.}\ \alpha^2\ \text{ſin.}\ (\zeta'' + t\sqrt{\tfrac{2g}{k''}}),$$

in quas formulas ingrediuntur ſex conſtantes arbitrariae, ſcilicet f, f', f'' et ζ, ζ', ζ'', quemadmodum ratio omnium motuum poſſibilium poſtulat.

DILVCIDATIONES
SVPER ALIQVOT CASVS AEQVILIBRII DIFFICILIORES.

Auctore

L. EVLERO.

§. 1.

Etſi in Statica, vbi de aequilibrio potentiarum agitur, omnia iam penitus videntur explorata; praecipue quando vires vel punctis, vel corporibus rigidis ſunt applicatae: tamen ſaepenumero eiusmodi occurrunt caſus, quibus determinatio aequilibrii non mediocrem ſagacitatem requirit. Talis caſus ſe mihi nuper obtulit, cum forte quadrilaterum ex quatuor virgis rigidis formatum eſſem contemplatus, quae circa angulos libere moueri poſſent, ita vt inde innumerabiles ſpecies quadrilaterorum formari queant. Tum vero inter binas virgas eiusmodi elaſtra applicata conſideraui, quae data vi ſeſe contrahendi eſſent praedita; vnde quaeſtio eſt nata: qualis figura ab iſtis elaſtris quadrilatero induceretur. Haec igitur quaeſtio ita ſe habebat:

§. 2. *Si quatuor virgae rigidae* A B, B C, C D, D A, *ita inuicem iungantur, vt circa angulos libere gyrari queant; tum vero ipſis inter angulos elaſtra* $a\,\alpha$, $b\,\beta$, $c\,\gamma$, *et*

et d δ, applicentur, quae datis viribus ſeſe contrahendi ſint praedita, inuenire ſpeciem, quam quadrilaterum ab actione harum virium accipiet, vt in aequilibrio conſiſtat.

§. 3. Hic facile intelligitur, ſtatum aequilibrii non ſolum a viribus, quibus ſingula elaſtra concipiuntur praedita, pendere, ſed etiam potiſſimum a punctis *a*, *α*, *b*, *β*, *c*, *γ*, *d*, δ, quibus ſingulis lateribus ſunt applicata; vnde facile patet, ſolutionem huius Problematis non parum eſſe abſconditam, cum adeo principia, ex quibus ſolutionem haurire opportet, vix ſatis ſint perſpecta. Ante autem quam ſolutionem huius Problematis ſuſcipiam, caſum faciliorem ſum euoluturus, quo elaſtra in ipſis angulis applicata accipiuntur, vnde ſequens problema naſcitur:

Problema.

§. 4. *Si quadrilaterum* ABCD *ex quatuor virgis rigidis fuerit ita formatum, vt circa angulos libere moueri queat; tum vero intra angulos oppoſitos, ſecundum diagonales* AC et BD, *elaſtra fuerint applicata, quae datis viribus ſeſe contrahendi polleant, inuenire ſtatum aequilibrii huius quadrilateri.* **Tab. I. Fig. 4.**

Solutio.

§. 5. Sit *p* vis, qua elaſtrum AC ſe contrahere conatur, et vis elaſtri BD $= q$; ſitque O interſectio ambarum diagonalium. Quia igitur punctum A ſollicitatur a vi $= p$, in directione AO, haec vis reſoluatur ſecundum directiones laterum AB et AD; vnde per principium fun-

 damen-

damentale reperitur vis ſec. $AB = \frac{p\,\text{ſin.}\,OAD}{\text{ſin.}\,BAD}$ et vis ſec. $AD = \frac{p\,\text{ſin.}\,OAB}{\text{ſin.}\,BAD}$. Cum autem ſit

$$\text{ſin.}\,BAD : \text{ſin.}\,OAD = BD.\,OA : OD.\,AB \text{ et}$$
$$\text{ſin.}\,ABD : \text{ſin.}\,OAB = BD.\,OA : OB.\,AD,$$

erit

$$\text{vis ſec. } AB = \frac{p.\,OD.\,AB}{BD.\,OA} \text{ et vis ſec. } AD = \frac{p.\,OB.\,AD}{BD.\,OA}.$$

Simili modo vis q, qua punctum B ſecundum BO vrgetur, per reſolutionem dabit

$$\text{vim ſec. } BA = \frac{q.\,OC.\,AB}{AC.\,OB} \text{ et vim ſec. } BC = \frac{q.\,OA.\,BC}{AC.\,OB}.$$

Pari modo vis p, qua punctum C in directione CO trahitur, per reſolutionem dabit

$$\text{vim ſec. } CB = \frac{p.\,OD.\,BC}{BD.\,OC} \text{ et vim ſec. } CD = \frac{p.\,OB.\,CD}{BD.\,OC}.$$

Denique vis q, qua punctum D verſus O trahitur, dat

$$\text{vim ſec. } DC = \frac{q.\,OA.\,CD}{AC.\,OD} \text{ et vim ſec. } DA = \frac{q.\,OC.\,AD}{AC.\,OD}$$

§. 6. Quod ſi iam iſtae vires, vtpote aequiualentes, elaſtrorum loco ſubſtituamus, ſingula latera quadrilateri a binis viribus contrariis ſollicitabuntur, quae ſequenti modo ſe habebunt:

$$\text{I. vis ſec. } AB = \frac{p.\,OD.\,AB}{BD.\,OA} - \frac{q.\,OC.\,AB}{AC.\,OB},$$
$$\text{II. vis ſec. } BC = \frac{q.\,OA.\,BC}{AC.\,OB} - \frac{p.\,OD.\,BC}{BD.\,OC},$$
$$\text{III. vis ſec. } CD = \frac{p.\,OB.\,CD}{BD.\,OC} - \frac{q.\,OA.\,CD}{AC.\,OD},$$
$$\text{IV. vis ſec. } DA = \frac{q.\,OC.\,AD}{AC.\,OD} - \frac{p.\,OB.\,AD}{BD.\,OA}.$$

§. 7. Manifeſtum autem eſt, quadrilaterum in aequilibrio eſſe non poſſe, niſi binae vires, quibus ſingula latera ſollicitantur, ſe mutuo deſtruant, vnde quatuor aequationes

tiones reſultare debere videntur, quae autem omnes ad vnicam reuocantur, quae erit:

$$p.\, AC.\, OB.\, OD = q.\, AD.\, OA.\, OC,$$

ita vt eſſe debeat

$$p : q = BD.\, OA.\, OC : AC.\, OB.\, OD, \text{ ſiue}$$
$$p : q = \frac{OA.\, OC}{AC} : \frac{OB.\, OD}{BD},$$

quocirca, cum detur ratio $p : q$, ſolutio problematis noſtri ad iſtud problema geometricum reducitur: *Vt datis quatuor lateribus* A B, B C, C D, D A, *tale quadrilaterum conſtruatur, vt ductis diagonalibus* A C *et* B D, *quae ſe mutuo ſecent in puncto* O, *fiat*:

$$\frac{OA.\, OC}{AC} : \frac{OB.\, OD}{BD} = p : q;$$

in cuius ſolutione Geometrae vires ſuas exercere poſſunt.

Corollarium.

§. 8. Si latera oppoſita fuerint inter ſe aequalia, ſcilicet $AB = CD$ et $BC = AD$, quadrilaterum ſemper erit parallelogrammum, eiusque diagonales AC et BD ſeſe in medio O interſecabunt, ita vt ſit $OA = OC = \frac{1}{2} AC$ et $OB = OD = \frac{1}{2} BD$; vnde pro hoc caſu prodibit haec proportio: $p : q = AC : BD$, ita vt diagonales eam ipſam rationem inter ſe tenere debeant, quam habent vires elaſtrorum A C et B D.

Scholion.

§. 9. Mirum hic non eſt, quod quatuor aequationes, ex quatuor lateribus deductae, eandem praebeant proportionem. Quia enim binae vires vtriusque elaſtri, quas

in angulos oppoſitos exercent, ſe mutuo tollunt, etiam omnes vires, in quas reſoluuntur, ſe mutuo deſtruere debent; vnde pro ſolutione noſtri problematis ſatis fuiſſet tantum binas vires, quibus vnicum latus A E urgetur, inveſtigaſſe. Quemadmodum in hac ſolutione ad interſectiones binarum diagonalium O ſpectauimus, vnde reſolutionem virium petiuimus, ita etiam alias ſolutiones concinnare licebit, quibus diagonales alio modo ad latera quadrilateri referantur.

Alia ſolutio eiusdem problematis.

Tab. I. Fig. 5. §. 10. Producantur bina latera oppoſita ad concurſum vsque in E et F, et conſideretur primo vis p, qua punctum C in directione C A vrgetur, quae directio ad triangulum C F D referatur, vnde colligetur

$$\text{vis } CB = \frac{p.\,AD.\,CF}{AC.\,DF} \text{ et vis } CD = \frac{p.\,AF.\,CD}{AC.\,DF}.$$

Sin autem eadem directio C A referatur ad triangulum C B E, reperietur vis ſecundum C B $= \frac{p.\,AE.\,CB}{AC.\,BE}$, et vis ſecundum C D $= \frac{p.\,AB.\,CE}{AC.\,BE}$. Deinde vis q, qua punctum B verſus D trahitur, referatur ad triangulum C B E, indeque reperietur vis B C $= \frac{q.\,DE.\,EC}{BD.\,CE}$, quam iam ſufficit inueniſſe, cum habeamus binas vires, qua latus B C vrgetur, ſcilicet

$$\text{vim } BC = \frac{q.\,DE.\,BC}{BD.\,CE} - \frac{p.\,AD.\,CF}{AC.\,DF},$$

quae ad nihilum reducta praebet hanc aequationem:

$$q.\,AC.\,BC.\,DE.\,DF = p.\,AD.\,BD.\,CE.\,CF.$$

Sin autem poſterior vis ſecundum C B ſumatur, prodibit haec aequatio:

$q.\,AC.$

$$q\,AC.BE.DE = p.BD.AE.CE, \text{ ſiue}$$
$$p:q = AC.BE.DE : BD.AE.CE, \text{ ſiue}$$
$$p:q = \frac{AC.DE}{CE} : \frac{BD.AE}{BE},$$

quae autem proportio variis modis variari poteſt, propter eximias relationes, quibus lineae huius figurae inter ſe comparari poſſunt.

§. 11. Quia haec proportio prorſus conuenit cum ante inuenta, ex ea quoque ſolutio problematis geometrici ante memorati deduci poterit. Ceterum quia hic duplex expreſſio pro vi ſecundum CB eſt reperta, inde iſta aequalitas deriuatur:

$$\frac{AE.CB}{AC.BE} = \frac{AD.CF}{AC.DF}, \text{ ita vt ſit}$$
$$AE.CB.DF = AD.BE.CF, \text{ ſiue}$$
$$\frac{CB.DF}{CF} = \frac{AD.BE}{AE}.$$

quae eſt egregia proprietas geometrica huius figurae. Ceterum plures aliae proprietates ex hac figura deduci posſunt.

§ 12. Huius autem problematis ſolutio parum confert ad problema principale initio propoſitum reſoluendum. In poſteriori enim ſtatim licuit vires elaſtrorum ſecundum directiones laterum quadrilateri reſoluere, id quod in priore problemate, vbi elaſtra non in ipſis angulis figurae ſunt applicata, per ſolitas virium reſolutiones praeſtari non poteſt. Hanc ob rem ſequens Lemma ſtaticum, vix adhuc cognitum, ſum propoſiturus, cuius, vſus in huiusmodi inueſtigationibus maximi momenti eſſe poterit.

Lemma

Lemma ſtaticum.

§. 13. *Vim corpori rigido applicatam ſecundum ternas directiones datas reſoluere.*

Solutio.

Tab. I. Fig. 6. Sit virgae rigidae A B applicata vis A ſecundum directionem $a\alpha$ trahens, quam reſoluere oporteat in ternas vires, quae ſecundum directiones datas A B, A D et B D agant; vbi quidem omnes has directiones in eodem plano ſitas aſſumo. Occurrat directio vis applicatae directioni A D in puncto α, et ducta recta a D vis A ſecundum $a\alpha$ reſoluatur primo ſecundum directiones a A et a D, vnde deducitur vis ſecundum $a A = \frac{A.\,\alpha D.\,A a}{A D.\,a\alpha}$ et vis ſecundum $a D = \frac{A.\,A\alpha.\,a D}{A D.\,a\alpha}$, quae vocetur $= T$, haecque vis puncto D concipiatur applicata, quae iam reſolui poterit ſecundum directiones B D et A D, quia haec vis T ſecundum a D trahit. Hinc ergo naſcitur:

$$\text{vis ſec. } B D = \frac{T.\,A a.\,B D}{A B.\,a D} \text{ et vis ſec. } A D. = T\,\frac{a B.\,A D}{A B.\,a D},$$

hinc loco T ſubſtituto valore reperietur

$$\text{vis ſec. } B D = \frac{A.\,A a.\,A\alpha.\,B D}{a\alpha.\,A B.\,A D} \text{ et vis ſec. } A D = \frac{A.\,A\alpha.\,a B}{a\alpha.\,A B},$$

ſicque ternae vires quaeſitae vi A aequiualentes erunt:

$$\text{I. vis ſec. } B A = \frac{A.\,\alpha D.\,A a}{A D.\,a\alpha},$$

$$\text{II. vis ſec. } A D = \frac{A.\,A\alpha.\,a B}{A B.\,a\alpha},$$

$$\text{III. vis ſec. } B D = \frac{A.\,a A.\,A\alpha.\,B D}{A B.\,A D.\,a\alpha}.$$

§. 14.

Corollarium.

§. 14. Eodem modo, ſi vis A, virgae AD in α applicata, ſecundum αa ageret, ea ſecundum easdem ternas directiones AD, AB et BD reſoluta dabit has vires ex prioribus natas, quoniam ibi tantum literas a et α, item B et D permutari oportet:

$$\text{I. vis ſec. } DA = \frac{A\,aB.\,A\alpha}{AB.\,a\alpha},$$

$$\text{II. vis ſec. } AB = \frac{A.\,Aa.\,\alpha D}{AD.\,a\alpha},$$

$$\text{III. vis ſec. } DB = \frac{A.\,A\alpha.\,Aa.\,DB}{AD.\,AB.\,a\alpha},$$

quae vires illis ſunt aequales et contrariae, id quod mirum non eſt, quoniam poſterior vis A priori etiam aequalis eſt et contraria.

Corollarium 2.

§. 15. Hinc ſi BD etiam fuerit virga rigida perinde ac latera AB et AD, intra quae applicatum ſit elaſtrum $a\alpha$, vi ſeſe contrahendi A praeditum, omnes vires hinc ortae ſe mutuo deſtruunt, et triangulum, ex his tribus virgis formatum, ABD, erit in aequilibrio. Hoc autem tantum locum habet, ſi BD fuerit virga rigida; niſi enim talis ſit, hic duae vires occurrunt inter ſe aequales $= \frac{A.\,Aa.\,A\alpha.\,BD}{AB.\,AD.\,a\alpha}$, quarum altera punctum B verſus D, altera vero punctum D verſus B vrgetur; vnde deducimus ſequens theorema maximum nobis vſum praeſtaturum.

Theorema ſtaticum.

§. 16. *Si intra duas virgas rigidas* AB *et* AD, *in* A *iunctas, vtcunque applicatum fuerit elaſtrum* $a\alpha$, *vi ſeſe*

contrahendi $= A$ *praeditum, eius loco ſubſtitui poteſt elaſtrum intra terminos* B *et* D *appiicatum, cuius vis ſeſe contrahendi ſit* $= \frac{A.\,Aa.\,A\alpha.\,BD}{AB.\,AD.\,a\alpha}$. Atque huius theorematis ope problematis initio propoſiti, et quod difficillimum merito erat viſum, ſolutio iam facile obtineri poteſt.

Solutio problematis initio propoſiti.

§. 17. Cum hic quatuor occurrant elaſtra $a\alpha$, $b\beta$, $c\gamma$, $d\delta$, ſint vires, quibus ea ſe contrahere conantur, ſingulatim A, B, C, D, et ex theoremate praemiſſo loco elaſtri $a\alpha$ ſubſtituatur elaſtrum BD, cuius vis ſit $\frac{A.\,Aa.\,A\alpha.\,BD}{AB.\,AD.\,a\alpha}$. Deinde ſimili modo loco elaſtri $b\beta$ ſubſtituatur elaſtrum AC, cuius vis ſit $= \frac{B.\,Bb.\,B\beta.\,CA}{BC.\,BA.\,b\beta}$. Porro loco elaſtri $c\gamma$, cuius vis $= C$, ſubſtitui poterit elaſtrum BD, cuius vis $= \frac{C.\,C\gamma.\,Cc.\,BD}{CD.\,BC.\,c\gamma}$. Denique loco elaſtri $d\delta$, cuius vis $= D$, ſubſtitui poteſt elaſtrum AC, cuius vis $= \frac{D.\,D\delta.\,Dd.\,AC}{AD.\,CD.\,d\delta}$. Cum igitur bina noua elaſtra, tam pro directione AC quam BD inuenta, in vnum coaleſcere concipi queant, quatuor elaſtra propoſita reducentur ad bina noua elaſtra, quorum alterum intra angulos A et C erit applicatum et vi ſeſe contrahendi pollens

$$= \frac{B.\,Bb.\,B\beta.\,CA}{AB.\,CB.\,b\beta} + \frac{D.\,D\delta.\,Dd.\,AC}{AD.\,CD.\,d\delta}.$$

Similique modo vis elaſtri intra B et D erit

$$\frac{A.\,Aa.\,A\alpha.\,BD}{BA.\,DA.\,a\alpha} + \frac{C.\,Cc.\,C\gamma.\,BD}{BC.\,DC.\,c\gamma}.$$

Hoc igitur modo problema initio propoſitum reductum eſt

eſt ad problema §. 4. ſolutum, vbi p et q nunc denotabunt vires elaſtrorum A C et B D. Cum igitur ibi eſſet inuentum

$$p.\frac{OB.OD}{BD} = q.\frac{OA.OC}{AC},$$

ſi loco p et q iſtos valores ſcribamus, habebimus ſequentem ſolutionem noſtri problematis:

$$\frac{B.Bb.B\beta.AC.OB.OD}{AB.CB.DB.b\beta} + \frac{D.Dd.D\delta.AC.OB.OD}{AD.CD.BD.d\delta}$$
$$= \frac{A.Aa.A\alpha.BD.OA.OC}{BA.DA.CA.a\alpha} + \frac{C.Cc.C\gamma.BD.OA.OC}{BC.DC.AC.c\gamma},$$

quae aequatio reducitur ad hanc formam:

$$\frac{OB.OD}{BD^2}\left(\frac{B.Bb.B\beta}{AB.CB.b\beta} + \frac{D.Dd.D\delta}{AD.CD.d\delta}\right)$$
$$= \frac{OA.OC}{AC^2}\left(\frac{A.Aa.A\alpha}{BA.DA.a\alpha} + \frac{C.Cc.C\gamma}{BC.DC.c\gamma}\right).$$

Corollarium.

§. 18. Quod ſi ergo bina latera oppoſita fuerint aequalia, ſcilicet $BC = AD$ et $CD = AB$, vt quadrilaterum fiat parallelogrammum, quia tum eſt

$$OA = OC = \tfrac{1}{2}AC \text{ et } OB = OD = \tfrac{1}{2}BD,$$

aequatio ſolutionem noſtri problematis continens erit

$$\frac{B.Bb.B\beta}{b\beta} + \frac{D.Dd.D\delta}{d\delta} = \frac{A.Aa.A\alpha}{a\alpha} + \frac{C.Cc.C\gamma}{c\gamma},$$

DETERMINATIO OMNIVM MOTVVM QVOS CHORDA TENSA ET VNIFORMITER CRASSA RECIPERE POTEST.

Auctore
L. EVLERO.

§. 1.

Tab. II. Fig. 1. Chordam ratione craſſitiei et materiae, ex qua conſtat, ita comparatam eſſe aſſumo, vt, ſi eius capiatur longitudo $= e$, eius pondus futurum ſit $=$ E. Talis igitur chordae portionem A B $= a$ in terminis A et B fixam et a vi quacunque $=$ P tenſam ſtatuamus; quam tenſionem ita concipere licet, ac ſi chordae, vltra terminum A productae et circa trochleam dependenti, appenſum eſſet pondus $=$ P. Quod ſi iam a proprio chordae pondere mentem abſtrahamus, quod prae pondere tendente P plerumque pro nihilo eſt habendum, tum, ſi chorda A B verticalem teneat ſitum, ea in aequilibrio erit conſtituta, ſi ſecundum lineam rectam A B fuerit extenſa. Interim tamen, etiamſi chordae pondus prae pondere tendente negligatur, tamen in motus determinatione eius maſſa in computum ingreditur, quae quia ipſius ponderi aequalis cenſetur, ea erit $= \frac{Ea}{e}$.

§. 2.

§. 2. Haec igitur chorda infinitis modis ad motum concitari poteſt, prout ea initio aliter atque aliter de ſtatu aequilibrii fuerit deturbata, dum ſcilicet vel ad figuram quamcunque fuerit diducta, vel ſingulis eius elementis certus motus impreſſus. Omnes autem has variationes tanquam infinite paruas ſpectamus, vt inde aliae vibrationes, niſi quae fuerint quam minimae, oriri nequeant. Hinc ſi chorda inter vibrandum habuerit figuram A M B, omnes eius applicatae P M quaſi infinite paruae ſpectantur; tum vero etiam omnes eius tangentes M T ab axe A B infinite parum declinare ſupponuntur: ita vt anguli P T M ſint pariter infinite parui; quae infinita paruitas cum in figura repraeſentari nequeat, nihil obſtat, quominus applicatae P M cum angulis P T M, quantumuis magnae exprimantur, dummodo cogitemus, eas pro motu chordae in ratione 1 ad ω diminui debere, denotante ω fractionem quam minimam. Tum vero etiam non ipſi anguli P T M ſed eorum tangentes in eadem ratione diminuentur; vnde intelligitur, etiam in figura finita hos angulos P T M nusquam ad angulum rectum asſurgere debere. Tab. II. Fig. 2.

§. 3. His praemonitis, quia applicatae P M revera ſunt infinite paruae, portio chordae A M ab abſciſſa A P non diſcrepare eſt cenſenda. Si igitur vocemus abſciſſam A P $= x$ et applicatam P M $= y$, arcus A M ipſi abſciſſae x aequalis reputari poteſt; vnde punctum chordae M inter vibrandum ſecundum aliam directionem moveri nequit, praeter directionem ipſius applicatae P M; ita vt in hac directione alternatim vel ad axem A B accedat vel recedat, idque in vtramque plagam. Praeterea

 vero

vero etiam formula $\frac{dy}{ax}$ vbique quaſi infinite paruum valorem ſeruare debet, quandoquidem iſta formula tangentem anguli P T M exprimit.

§. 4. Quomodocunque autem chorda initio fuerit impulſa, quaeſtio principalis ſemper huc redit, vt ad quoduis tempus figuram A M B, quam chorda tum habebit, definiamus; deinde vero etiam celeritas, qua hoc momento ſingula chordae puncta mouentur, debet inueſtigari. Sicque ad ſtatum chordae ad quoduis tempus determinandum, duae res requiruntur: primo ſcilicet ipſa figura chordae; tum vero etiam eius motus, quo hoc momento agitabitur. Cum autem iſte chordae ſtatus ad aliquod tempus fuerit cognitus, ex eo ad quoduis aliud tempus ſtatus chordae, hoc eſt tam eius figura quam motus quaeri debebit, vnde ſequens problema ſoluendum proponitur.

Problema.

Si initio, ſiue dato quopiam temporis momento, cognitus fuerit ſtatus chordae, eius ſcilicet figura et motus; totum motum, qui deinceps ſequetur, definire, ita vt ad quoduis aliud tempus tam figuram quam motum chordae in ſingulis punctis aſſignare valeamus.

Solutio.

Tab. II. Fig. 3. §. 5. Ante omnia igitur ſtatum, in quo chorda dato tempore $t = 0$ verſabatur, diſtincte repraeſentemus. Referat igitur curua A Z B figuram, quam chorda hoc tempore habuit, pro qua abſciſſae A X $= x$ reſpondeat appli-

applicata X Z $= z$, ita vt pro qualibet abſciſſa x quantitas applicatae z innoteſcat; quae cum reuera quaſi ſit infinite parua, in ratione numeri praemagni ad vnitatem diminuta eſt concipienda. Quaecunque autem fuerit haec curua, eius applicatae in terminis A et B debent eſſe nullae, quia in his punctis chorda aſſumitur fixa. Hic quidem omnes applicatas in eandem plagam directas exhibemus; nihil autem impedit, quo minus haec curua vtrinque circa axem ſit diſpoſita.

§. 6. Eodem modo altera curua A V B ita referat motum chordae, quo eodem tempore $t = 0$ ciebatur, vt applicata X V $= v$, abſciſſae A X $= x$ reſpondens, exprimat celeritatem, qua iſtud chordae punctum ſurſum mouetur, ſiquidem applicata X V ſurſum vergat; ſin autem iſtae applicatae in alteram partem cadant, etiam motus directio contraria eſt intelligenda. Quia igitur ambo chordae termini A et B manent fixi, pro his locis, ſumendo vel $x = 0$, vel $x = a$, iſta applicata v itidem euaneſcere debet. Ceterum hic applicatae in figura expreſſae in eadem ratione imminutae concipi debent, qua ſuperiores applicatae z. Celeritates autem perpetuo per ſpatia deſignamus, quae ab iis vno minuto ſecundo percurrentur, quia ſcilicet tempora in minutis ſecundis exprimimus.

§. 7. Quod ſi iam elapſo tempore quocunque t chorda eiusmodi figuram induerit, vt abſciſſae A X $= x$ reſpondeat applicata X Y $= y$, ea vtique erit certa quaedam functio binarum variabilium x et t, quam ergo ita comparatam eſſe oportet, vt poſito $t = 0$ fiat $y = z$, ac praete-

praeterea $(\frac{dy}{dt}) = v$, ſiquidem z et v hic ſpectantur vt functiones ſolius variabilis x per ſtatum initialem datae; atque hic perinde eſt, ſiue hae functiones ſint continuae ſiue diſcontinuae, vel quod perinde eſt: ſiue illae binae curuae A Z B et A V B, certa quadam aequatione comprehendi queant, ſiue pro lubitu vtcunque ſit formata.

§. 8. Iam igitur principia Mechanicae pro motu chordarum hanc ſuppeditant aequationem generalem:

$$(\frac{ddy}{dt^2}) = cc(\frac{ddy}{dx^2}),$$

vbi c denotat certam quantitatem conſtantem per indolem chordae $\frac{e}{E}$ expreſſam, eiusque tenſionem P determinandam, quae pro noſtro caſu erit $c = \sqrt{\frac{2geP}{E}}$, denotante g altitudinem lapſus grauium vno minuto ſecundo. Huius vero aequationis differentio-differentialis integrale completum notum eſt ita per duas functiones arbitrarias exprimi poſſe, vt ſit:

$$y = \Gamma : (ct + x) - \Delta : (ct - x).$$

§. 9. Hanc aequationem generalem primum ita pro noſtro caſu limitemus, vt applicata y ſemper euaneſcat tam caſu $x = 0$ quam caſu $x = a$. Primo igitur poſito $x = 0$ habebimus $0 = \Gamma : ct - \Delta : ct$, ideoque $\Delta : ct = \Gamma : ct$, ita vt indoles functionis Δ cum functione Γ conuenire debeat, atque hinc nanciſcimur iſtam aequationem ad noſtrum caſum propius accommodatam:

$$y = \Gamma : (ct + x) - \Gamma : (ct - x).$$

§. 10. Pro altera conditione faciamus $x = a$ ac fieri neceſſe eſt $\Gamma : (ct + a) = \Gamma : (ct - a)$. Hinc ſi ponamus

namus $ct - a = p$, erit $ct + a = p + 2a$; vnde patet, indolem functionis Γ ita comparatam eſſe debere, vt ſit:

$$\Gamma : (p + 2a) = \Gamma : p.$$

Hinc ergo ſi iſta functio per lineam curuam ſuper axe in infinitum producto repraeſentetur, ea vtrinque ita in infinitum producta eſt concipienda, vt omnibus abſciſſis p, $p + 2a$, $p + 4a$, $p + 6a$, etc. itemque negatiuis $p - 2a$, $p - 4a$, $p - 6a$, $p - 8a$, etc. pares applicatae conueniant. Ex quo patet, tales curuas nulla aequatione finita comprehendi poſſe.

§. 11. Quod porro ad motum chordae attinet, ex valore applicatae y inuento colligitur

$$\left(\frac{dy}{dt}\right) = c\Gamma' : (ct + x) - c\Gamma' : (ct - x),$$

qui valor, poſito $x = 0$, iam ſponte euaneſcit: at poſito $x = a$ fiet

$$\Gamma' : (ct + a) = \Gamma' : (ct - a),$$

quippe quod ex conditione praecedente ſequitur, qua erat

$$\Gamma : (ct + a) = \Gamma : (ct - a).$$

Haec igitur reſpiciunt noſtram chordam, cuius motum nunc in genere exploremus, quicunque fuerit ſtatus initialis; quamobrem easdem aequationes ad ſtatum initialem ſupra determinatum accommodemus. Poſito ergo $t = 0$ primo fieri debet $y = z$, vnde habebimus $z = \Gamma : x - \Gamma : (-x)$, vnde fit $\Gamma : (-x) = \Gamma : (+x) - z$, ex quo iam intelligimus, quomodo curua per functionem Γ deſignata retro pro abſciſſis negatiuis continuari debeat.

 §. 12.

§. 12. Conditio autem motus praeſcripta, poſito $t = 0$ praebere debet $\left(\frac{dy}{dt}\right) = v$, unde obtinemus

$$v = c\,\Gamma' : x - c\,\Gamma' : (-x),$$

vnde pro functione differentiali Γ' ſimilem deducimus determinationem vt ante

$$\Gamma' : (-x) = \Gamma' : (+x) - \frac{v}{c}.$$

His igitur conditionibus inſuper ſatisfieri oportet, vt ſolutio generalis ad caſum propoſitum reſtringatur ac penitus determinetur.

§. 13. Cum autem ipſam functionem Γ cum eius valore differentiali Γ' immediate comparare non liceat, reducamus poſteriorem conditionem

$$v = c\,\Gamma' : x - c\,\Gamma : (-x)$$

ad indolem ipſius functionis Γ, quem in finem hanc aequationem ducamus in dx, vt fiat

$$v\,dx = c\,dx\,\Gamma' : x - c\,dx\,\Gamma' : (-x),$$

quae aequatio integrata praebet

$$\int v\,dx = c\,\Gamma : x + c\,\Gamma : (-x).$$

Sicque pro indole functionum $\Gamma : x$ et $\Gamma : (-x)$ determinanda has duas nacti ſumus aequationes:

$$\Gamma : x - \Gamma : (-x) = z \quad \text{et} \quad \Gamma : x + \Gamma : (-x) = \tfrac{1}{c}\int v\,dx,$$

vnde colligimus:

$$\Gamma : x = \tfrac{1}{2c}\int v\,dx + \tfrac{1}{2}z \quad \text{et}$$

$$\Gamma : (-x) = \tfrac{1}{2c}\int v\,dx - \tfrac{1}{2}z,$$

quarum formularum ope per ſolas quantitates v et z valores functionis Γ tam pro abſciſſis poſitiuis $+x$, quam

pro

pro negatiuis $-x$, definire poterimus a termino $x = o$ vsque ad terminum $x = a$, ita vt huius functionis figura per interuallum $= 2a$ deſcribi queat, id quod ſufficit pro ea functione vtrinque in infinitum continuanda, quoniam ſemper poſt interualla $= 2a$ eaedem applicatae reuertuntur.

§. 14. Vt igitur haec conſtructio ad praxin transferri queat, ex ſcala celeritatum AVB, cuius applicatae $XV = v$, valores formulae $\int v\,dx$ conſtruere debemus. Cum igitur formula $\int v\,dx$ exprimat arcum curuae AXV, ſuper eodem axe deſcribatur noua curua ASD, vt vbique ſit $XS = \int \frac{v\,dx}{c}$, ſiue rectangulum $c.\ XS =$ areae AVX. Hac igitur curua deſcripta, vocemus eius applicatam $XS = s$, et habebimus noſtras functiones Tab. II. Fig. 5.

$$\Gamma : x = \tfrac{1}{2}s + \tfrac{1}{2}z \text{ et } \Gamma : (-x) = \tfrac{1}{2}s - \tfrac{1}{2}z.$$

§. 15. Quo igitur conſtructio facilior reddatur, ſuper eodem interuallo a tanquam axe deſcribantur ambae curuae AZB et ASD, atque ex hac figura ſcala functionum Γ ſequenti modo deſcribi poterit. Super axe infinito a puncto A capiantur vtrinque interualla $AX = Ax = x$ et in X erigatur applicata $X\Gamma = \tfrac{1}{2}XS + \tfrac{1}{2}XZ$, et ex x applicata $x\gamma = \tfrac{1}{2}XS - \tfrac{1}{2}XZ$, quae quidem ad alteram partem cadat ob $XS < XZ$, haecque operatio pro omnibus abſciſſis inſtituatur; quo facto patet, in ipſo puncto A applicatam fore nullam, ſumto vero $x = a$, in puncto B fore $BG = \tfrac{1}{2}BD$; eodemque modo in b erit applicata $bg = \tfrac{1}{2}BD$. Sicque tractum huius ſcalae, qua functio Γ repraeſentatur, iam per totum interuallum $Bb = 2a$ deſcriptum fore Fig. 6. Fig. 7.

patet,

patet, quem etiam dextrorſum, quoties libuerit, per intervalla G A' G', G' A'' G'', G'' A''' G''', etc. repeti licebit.

§. 16. Iam ope huius ſcalae ad quoduis tempus figura chordae facillime delineari poterit. Sumatur enim ſuper axe interuallum $A T = c t$, at a puncto T abſcindantur vtrinque internalla $T P$ et $T p = x$, quibus valoribus reſpondeant applicatae $P Q$ et $p q$, eritque ex indole functionis Γ, applicata $P Q = \Gamma : (c t + x)$ et $p q = \Gamma : (c t - x)$, vnde, pro figura, quam chorda hoc momento habebit, abſciſſae x reſpondebit applicata $y = P Q - p q$, ſicque pro ſingulis abſciſſis applicatae definiuntur.

§. 17. Ex hac conſtructione manifeſtum eſt, eandem chordae figuram eſſe prodituram, quam habuerat initio, elapſo tempore $t = \frac{2a}{c}$, iterumque elapſo tempore $t = \frac{4a}{c}$, quia pro omnibus his temporibus puncta T in ſimilia noſtrae ſcalae loca incidunt; ex quo manifeſtum eſt, omnia vibrationum tempora inter ſe fore aequalia et tempus vniuscuiusque $= \frac{a}{c}$ min. ſec. ita vt numerus vibrationum vno minuto ſecundo editarum $= \frac{c}{a}$, id quod eo magis notatu dignum eſt, quod tempora vibrationum plane non a ſtatu initiali pendeant, niſi forte figura principalis $b \gamma A \Gamma G$ iam contineat duas pluresue portiones inter ſe ſimiles et aequales; tum enim etiam tempora vibrationum vel ad ſemiſſem, vel ad trientem, vel ad quadrantem redigentur, perinde ac ſi chorda eſſet vel duplo, vel triplo, vel quadruplo breuior.

§. 18

§. 18. Hoc igitur modo problema noſtrum perfecte reſolutum vtique eſt cenſendum, cum, quicunque etiam ſtatus chordae initio fuerit inductus, tam ex figura quam motu initiali per facillimas conſtructiones, ſine vllo calculo, ad quoduis tempus figura, quam chorda tum eſt habitura, delineari poſſit, id quod aliis methodis, quibus Geometrae ad hoc problema reſoluendum ſunt vſi, nullo plane modo praeſtari poteſt, cuius rei ratio manifeſto in eo eſt ſita, quod hoc problema ad genus Analyſeos fere prorſus nouum eſt referendum, in quo ſcilicet functiones duarum pluriumue variabilium pertractantur; vnde etiam ſolutiones adhuc prorſus inſolitae et a communi Annalyſi penitus abhorrentes deriuantur, quandoquidem functionibus diſcontinuis, ſeu lineis curuis pro lubitu ductis, nullus adhuc locus in Geometria eſt conceſſus.

DE PROPRIETATIBVS TRIANGVLORVM MECHANICIS.

Auctore
L. EVLERO.

Quemadmodum in Geometria ſola extenſio corporum cum eorum figura conſideratur, ita in Mechanica potiſſimum materia, ex qua conſtant, ſpectatur, ex cuius quantitate eorum maſſa ſeu inertia aeſtimari ſolet, vnde plurimae aliae affectiones, quas in determinatione motus noſſe oportet, deducuntur. Inter has affectiones praecipuum locum tenet centrum gravitatis, quod autem potius centrum inertiae appellare expedit, quoniam etiam in corporibus, quae non ſunt grauia, perinde locum habet. Tum vero ad motum corporum determinandum, pro quouis axe, circa quem gyratur, momentum inertiae cognitum eſſe debet, quem in finem imprimis reſpectu omnium axium, qui per centrum inertiae duci poſſunt, momenta inertiae definiri neceſſe eſt, inter quos axes maxime eminent ii, quos principales vocaui, quippe circa quos corpora libere gyrari poſſunt, ita vt non opus ſit eos a quapiam vi externa ſuſtineri. Iidem vero axes principales hac inſigni proprietate ſunt praediti, vt eorum reſpectu momenta inertiae ſint vel maxima vel minima, quemadmodum in Theoria mea

mea Motus corporum ſolidorum fuſius oſtendi. Haec omnia etiam ad figuras planas transferri poſſunt, ſi eas quaſi ex lamina tenuiſſima, quae vbique ex materia homogenea conſtat, exſecta concipiamus. Accommodaui equidem iam in allegato tractatu haec omnia quoque ad triangula. Quoniam vero cunctas iſtas proprietates ex formulis generaliſſimis, quas pro omnibus corporibus dederam, deriuavi, atque hoc argumentum tantum quaſi in tranſitu attigi, haud abs re fore arbitror, ſi iſtas triangulorum proprietates mechanicas ex primo fonte aliquanto vberius determinauero.

Lemma.

§. 1. *Propoſito triangulo quocunque* A B C, *eius centrum inertiae* I *reperietur, ſi in latere* A B *abſcindatur portio* B b $= \frac{1}{3}$ A B; *tum vero ex* b *lateri* B C *ducatur parallela* b c: *huius enim punctum medium* I *erit centrum grauitatis ſeu inertiae trianguli.* Tab. III. Fig. 1.

Scholion.

§. 2. Conuenit haec constructio cum ea, quae in elementis tradi ſolet, vbi ex angulo A duci iubetur recta A D, latus oppoſitum B C biſecans in D, in qua ſumto interuallo I D $= \frac{1}{3}$ A D, erit I centrum grauitatis. Cum enim *b c* ducta ſit lateri B C parallela, erit etiam interuallum B *b* $= \frac{1}{3}$ A B, et quia I *b* $=$ I *c*, punctum I vtique erit centrum inertiae. Praeſens autem conſtructio ad noſtrum inſtitutum magis eſt accommodata.

De

Denominationes generales.

§. 3. Vt fractiones, ex parte illa tertia abſcindenda oriundae, euitentur, latera trianguli ita denotemus:

$$AB = 3c, \; AC = 3b \text{ et } BC = 3a;$$

ipſos vero angulos

$$BAC = \alpha, \; ABC = \beta \text{ et } ACB = \gamma;$$

vnde pro lubitu loco cuiusque lateris angulus ei oppoſitus in calculum introduci poterit. Ita ſi loco lateris $AC = 3b$ angulo β vti velimus, habebimus

$$9bb = 9aa + 9cc - 18ac \cos.\beta, \text{ ſiue}$$
$$bb = aa + cc - 2ac \cos.\beta;$$

quibus poſitis erit pro centro inertiae I, interuallum $Bb = c$, et quia eſt $bc = \frac{2}{3} BC = 2a$, erit $bI = a$. Si praeterea etiam rectam AD deſideremus, ex elementis notum eſt eſſe $4AD^2 + BC^2 = 2AB^2 + 2AC^2$, vnde fit

$$4AD^2 = 9(2bb + 2cc - aa), \text{ ideoque}$$
$$AD = \frac{3}{2}\sqrt{(2bb + 2cc - aa)}, \text{ vnde fit}$$
$$AI = \sqrt{(2bb + 2cc - aa)}.$$

Simili ergo modo foret

$$BI = \sqrt{(2aa + 2cc - bb)} \text{ et } CI = \sqrt{(2aa + 2bb - cc)}.$$

Problema.

§. 4. *Inuenire momentum inertiae trianguli* ABC, *reſpectu axis plano trianguli in ipſo centro inertiae* I *perpendiculariter inſiſtentis.*

Solutio.

Solutio.

Sumto interuallo indefinito $AX = x$, ducatur recta XZ baſi BC parallela, eritque $XZ = \frac{ax}{c}$. Iam in hac linea capiatur interuallum indefinitum $XY = y$, et pro momento inertiae, quod quaeritur inueniendo, elementum lineare $Yy = dy$ in quadratum diſtantiae ab axe, quae eſt recta IY duci debet; tum enim ſumma omnium talium productorum $dy. IY^2$, per totam trianguli aream extenſa, dabit momentum inertiae quaeſitum. Hunc in finem ducatur recta IX, et quia in triangulo bIX dantur latera $Ib = a$ et $bX = 2c - x$, cum angulo intercepto $IbX = \beta$, erit Fig. 2.

$$IX^2 = aa + (2c - x)^2 - 2a(2c - x) \text{coſ.} \beta.$$

Ponatur autem breuitatis gratia haec recta $IX = p$, vt ſit $pp = aa + (2c - x)^2 - 2a(2c - x) \text{coſ.} \beta$; tum vero ſit angulus $IXY = bIX = \theta$, eritque $\text{ſin.} \theta = \frac{(2c - x) \text{ſin.} \beta}{p}$. Nunc igitur ex triangulo IXY erit

$$IY = pp + yy - 2py \text{coſ.} \theta,$$

quod quadratum ductum in dy et integratum praebet integrale $ppy + \frac{1}{3}y^3 - pyy \text{coſ.} \theta$; quod ſponte euaneſcit ſumto $y = 0$. Ponatur nunc $y = XZ = \frac{ax}{c}$, et momentum ex tota linea XZ ortum erit

$$\frac{appx}{c} + \frac{a^3x^3}{3c^3} - \frac{aapxx}{cc} \text{coſ.} \theta.$$

In hac igitur formula tantum opus eſt loco literarum p et θ ſuos valores ſubſtitui. Eſt vero vti vidimus

$$pp = aa + (2c - x)^2 - 2a(2c - x) \text{coſ.} \beta.$$

At pro angulo θ ex puncto X in Ib demittatur perpendiculum

X P, eritque $p \operatorname{coſ.} \theta = \mathrm{I\,P}$. Cum igitur ſit

$$b\,\mathrm{P} = b\,\mathrm{X} \operatorname{coſ.} \beta = (2\,c - x) \operatorname{coſ.} \beta,$$

ob $\mathrm{I}\,b = a$ erit

$$\mathrm{I\,P} = a - (2\,c - x) \operatorname{coſ.} \beta = p \operatorname{coſ.} \theta;$$

quibus valoribus ſubſtitutis prodit momentum quaeſitum:

$$\frac{a\,x^3}{c} + \frac{a^3\,x^3}{3\,c^3} - \frac{a^3\,x\,x}{c\,c} - 4\,a\,x\,x + 4\,a\,c\,x$$
$$+ \frac{a^3\,x}{c} - \frac{a\,a\,x}{c\,c}(2\,c - x)^2 \operatorname{coſ.} \beta.$$

Augeatur nunc interuallum $\mathrm{A\,X} = x$ ſuo differentiali $d\,x$, et linea X Z promouebitur per interuallum infinite parvum $d\,x \operatorname{ſin.} \beta$, in quod igitur momentum modo inuentum ducatur et integretur, reperieturque iſta expreſſio:

$$\frac{a\,x^4 \operatorname{ſin.} \beta}{4\,c} + \frac{a^3\,x^4 \operatorname{ſin.} \beta}{12\,c^3} - \frac{a^3\,x^3 \operatorname{ſin.} \beta}{3\,c\,c} - \tfrac{4}{3}\,a\,x^3 \operatorname{ſin.} \beta + 2\,a\,c\,x\,x \operatorname{ſin.} \beta$$
$$+ \frac{a^3\,x\,x}{2\,c} - \operatorname{ſin.} \beta \operatorname{coſ.} \beta \left(2\,a\,a\,x\,x - \frac{4\,a\,a\,x^3}{3\,c} + \frac{a\,a\,x^4}{4\,c\,c}\right),$$

quamobrem hoc integrale extendatur per totum triangulum, ſtatuendo $x = 3\,c$, ac prodibit totum momentum inertiae quaeſitum ita expreſſum:

$$\tfrac{9}{4}\,a\,c\,(a\,a + c\,c) \operatorname{ſin.} \beta - \tfrac{9}{4}\,a\,a\,c\,c \operatorname{ſin.} \beta \operatorname{coſ.} \beta,$$

quod reducitur ad hanc formam:

$$\tfrac{9}{4}\,a\,c \operatorname{ſin.} \beta\,(a\,a + c\,c - a\,c \operatorname{coſ.} \beta).$$

Inuenta hac expreſſione introducamus etiam maſſam trianguli, quippe quae in omnia momenta inertiae ingredi debet, et cum area trianguli ſit

$$= \tfrac{1}{2}\,\mathrm{A\,B}.\mathrm{B\,C} \operatorname{ſin.} \beta = \tfrac{9}{2}\,a\,c \operatorname{ſin.} \beta,$$

ſi maſſam deſignemus litera M, vt ſit $\mathrm{M} = \tfrac{9}{2}\,a\,c \operatorname{ſin.} \beta$, prodibit momentum inertiae reſpectu axis ad planum trianguli in puncto I normalis

$$= \tfrac{1}{2}\,\mathrm{M}\,(a\,a + c\,c - a\,c \operatorname{coſ.} \beta).$$

Corol-

Corollarium.

§. 5. Cum ſit $bb = aa + cc - 2ac \cos. \beta$, erit $ac \cos. \beta = \frac{aa + cc - bb}{2}$;

quo valore ſubſtituto noſtrum momentum inertiae prodibit $\frac{1}{4} M (aa + bb + cc)$, quae formula, quoniam tria latera in eam aequaliter ingrediuntur, characterem veritatis ſecum gerit; vnde ſi latera ipſa introducantur, erit hoc momentum inertiae $\frac{1}{36} M (AB^2 + AC^2 + BC^2)$.

Scholion.

§. 6. Quia iſte axis perpendiculariter inſiſtit in ipſo centro inertiae I, euidens eſt, eum ſimul eſſe axem principalem trianguli, quandoquidem momentum inertiae eius reſpectu inuentum ſine dubio omnium eſt maximum; ſimul enim atque axis inclinatur, propius ad elementa ſinguala dmouetur, vnde momentum inertiae minus exſurgere debet. Praeterea vero hoc etiam inde patet, quod ſi triangulum circa hunc axem gyretur, omnes vires centrifugae ſe mutuo manifeſto deſtruant, in quo conſiſtit character praecipuus axium principalium; ex quo ſequitur: reliquos axes principales in ipſum planum trianguli incidere debere, quandoquidem demonſtraui, ternos axes principales perpetuo inter ſe eſſe normales. Ad eos igitur inueſtigandos, primum in plano trianguli axem quemcunque per centrum inertiae ductum conſideremus, eiusque reſpectu momentum inertiae quaeramus, quo deinceps ex hac generali determinatione axes principales elici queant.

Problema 2.

§. 7. *Inuenire momentum inertiae trianguli* A B C, *reſpectu axis cuiuscunque in ipſo plano trianguli ſiti et per eius centrum inertiae* I *tranſeuntis.*

Solutio.

Tab. III. Fig. 3. Sit recta I P Q axis propoſitus, qui faciat cum recta $b\,c$ angulum b I P $= \phi$, erit angulus b P I $= 180° - \beta - \phi$, pro quo breuitatis gratia ſcribamus ω. Cum igitur ſit I $b = a$, erit b P $= \frac{a\,ſin.\,\phi}{ſin.\,\omega}$ et I P $= \frac{a\,ſin.\,\beta}{ſin.\,\omega}$, hincque erit interuallum A P $= 2\,c - \frac{a\,ſin.\,\phi}{ſin.\,\omega}$. Iam ducatur indefinite baſi B C parallela X Z, cui productae axis occurrat in puncto Q; tum poſita A X $= x$ erit X Z $= \frac{a\,x}{c}$. Ergo quia triangulum X P Q ſimile eſt triangulo b P I, erit angulus P X Q $= \beta$, angulus X P Q $= 180° - \beta - \phi = \omega$, et angulus X Q P $= \phi$; vnde quia latus X P $= 2\,c - x - \frac{a\,ſin.\,\phi}{ſin.\,\omega}$, erit latus

$$\text{P Q} = \frac{(2\,c - x)\,ſin.\,\beta}{ſin.\,\phi} - \frac{a\,ſin.\,\beta}{ſin.\,\omega} \text{ et X Q} = \frac{(2\,c - x)\,ſin.\,\omega}{ſin.\,\phi} - a,$$

pro quo breuitatis gratia ſcribamus q, vt ſit

$$q = \frac{(2\,c - x)\,ſin.\,\omega}{ſin.\,\phi} - a.$$

Nunc in recta X Z capiatur portio indefinita X Y $= y$, cuius elementum ſit Y $y = d\,y$, vnde ad axem demittatur perpendiculum Y R $= (q + y)$ ſin. ϕ, quae cum ſit diſtantia puncti Y ab axe, erit elementi linearis momentum inertiae $= d\,y\,(q + y)^2$ ſin. ϕ^2, cuius formulae, vbi ſola y eſt variabilis, integrale erit $(q\,q\,y + q\,y\,y + \frac{1}{3}\,y^3)$ ſin. ϕ^2, quod quia ſponte euaneſcit poſito $y = 0$, ſtatuamus $y = \frac{a\,x}{c}$,

eritque

eritque momentum ex tota linea XZ natum

$$\left(\frac{aqqx}{c} + \frac{aaqxx}{cc} + \frac{a^3x^3}{3c^3}\right) \text{ſin.}\,\Phi^2;$$

quae expreſſio, ſi loco q valor aſſumtus ſubſtituatur, abit in hanc formam:

$$\frac{ax(2c-x)^2\,\text{ſin.}\,\omega^2}{c} - \frac{aax(2c-x)^2\,\text{ſin.}\,\Phi\,\text{ſin.}\,\omega}{cc} + \frac{a^3x(3cc-3cx+xx)\,\text{ſin.}\,\Phi^2}{3c^3}.$$

Augeatur nunc abſciſſa $AX = x$ ſuo differentiali dx, vnde recta XZ accipiet latitudinem dx ſin. β, et expreſſio modo inuenta per dx ſin. β multiplicata integretur, ſtatimque loco x ſcribatur $3c$, ſicque momentum inertiae pro toto triangulo reperietur

$$\tfrac{9}{4}ac^3\,\text{ſin.}\,\beta\,\text{ſin.}\,\omega^2 - \tfrac{9}{4}aacc\,\text{ſin.}\,\beta\,\text{ſin.}\,\Phi\,\text{ſin.}\,\omega + \tfrac{9}{4}a^3c\,\text{ſin.}\,\beta\,\text{ſin.}\,\Phi^2.$$

Cum nunc area trianguli ſit $\frac{9}{2}ac$ ſin. β, quae quaſi maſſam trianguli refert, eius loco literam M ſcribamus, vt ſit $\frac{9}{4}ac$ ſin. $\beta = \frac{1}{2}$ M, quo facto momentum inertiae quaeſitum ita ſatis ſuccincte exprimetur:

$$\tfrac{1}{2}M(cc\,\text{ſin.}\,\omega^2 - ac\,\text{ſin.}\,\Phi\,\text{ſin.}\,\omega + aa\,\text{ſin.}\,\Phi^2).$$

Vbi meminiſſe oportet eſſe $\omega = 180° - \beta - \Phi$, denotante Φ angulum, quo axis IPQ ad rectam bc, ideoque etiam ad latus BC inclinatur, dum ω denotat angulum, ſub quo idem axis ad latus AB inclinatur.

Corollarium I.

§. 8. Quod ſi ergo per angulum B axi IPQ ducatur parallela FBG, in eamque ex reliquis angulis A et C ducantur normales AF et CG erit

$$AF = 3c\,\text{ſin.}\,\omega \text{ et } CG = 3a\,\text{ſin.}\,\Phi,$$

vnde momentum inertiae ita erit expreſſum:

$$\tfrac{1}{18}M(AF^2 - AF.CG + CG^2).$$

Corollarium 2.

§. 9. Si axis I P Q ipſi lateri B C parallelus ſtatuatur, erit angulus $\phi = 0$, hincque $\omega = 180° - \beta$. Hoc ergo caſu momentum inertiae reſpectu iſtius axis erit $\frac{1}{2} M c c$ ſin. β^2. Ad hoc intelligendum, ſi ex A in latus B C perpendiculum demitteretur, id foret $= 3 c$ ſin. β, ideoque perpendiculum ex puncto I in B C demiſſum $= c$ ſin. β. Demittatur ergo hoc perpendiculum I L, et reſpectu axis, lateri B C paralleli, momentum inertiae erit $\frac{1}{2}$ M. I L^2; vnde ſimul momenta inertiae innoteſcunt pro axibus reliquis lateribus parallelis.

Corollarium 3.

§. 10. Si axis ita accipiatur, vt per angulum A tranſeat, cadet punctum P in A; hincque erit

$$b P = \frac{a \text{ ſin. } \phi}{\text{ſin. } \omega} = 2 c, \text{ ſiue } a \text{ ſin. } \phi = 2 c \text{ ſin. } \omega;$$

quamobrem reſpectu axis I A momentum inertiae erit $\frac{3}{a} M c c$ ſin. ω^2, quod autem commodius ad latus B C, vtpote angulo A oppoſitum, reducitur, fietque hoc momentum inertiae $= \frac{3}{8} M a a$ ſin. ϕ, vbi ϕ denotat angulum, quem axis A I productus cum baſi B C conſtituit; vnde ſimul patet, quomodo momenta inertiae reſpectu axium I B et I C exprimentur.

Corollarium 4.

Tab. III. Fig. 4. §. 11. Quod ſi ergo in figura ex centro inertiae I in ſingula latera demittantur perpendicula I p, I q, I r; tum pro axe per I ducto et lateri B C parallelo momentum inertae erit $\frac{1}{2}$ M. I p^2; at pro axe lateri A B parallelo

lo $= \frac{1}{2}$ M. I r^2, ac pro axe lateri A C parallelo erit hoc momentum inertiae $= \frac{1}{2}$ M I q^2. Praeterea vero ſi ex b in I A ducatur perpendiculum $b\,s$, momentum inertiae reſpectu axis I A erit $\frac{3}{8}$ M $a\,a$ ſin. Φ^2. Quia autem I $b = a$ et angulus A I $b = \Phi$, erit $b\,s = a$ ſin. Φ, ideoque pro axe I A momentum inertiae erit $\frac{3}{8}$ M. $b\,s^2$, id quod pari modo ad axes I B et I C extenditur.

Corollarium 5.

§. 12. Conſideremus etiam axes in latera perpendiculares, ac denotet I p talem axem in latus B C normalem, eritque $\Phi = 90°$, hincque $\omega = 90° - \beta$, vnde momentum inertiae pro hoc axe I p reperitur

$$\tfrac{1}{2} M (c\,c \text{ coſ. } \beta^2 - a\,c \text{ coſ. } \beta + a\,a),$$

vbi eſt vti vidimus I $p = c$ ſin. β. Quare ſi hoc perpendiculum vocemus I $p = p$, vt ſit c ſin. $\beta = p$, erit $c = \frac{p}{\text{ſin. } \beta}$, hincque momentum inertiae erit

$$(p\,p \text{ cot. } \beta^2 - a\,p \text{ cot. } \beta + a\,a)\tfrac{1}{2} M;$$

quae expreſſio quo magis ad noſtrum ſcopum accommodetur, ex I ducantur lateribus A B et A C parallelae I β et I γ, erit B $\beta = a$ et ob eandem rationem C $\gamma = a$, ita vt ſit $\beta\gamma = a$. Iam ex triangulo I βp erit

$$\beta p = \text{I} p \text{ cot. } \beta = p \text{ cot. } \beta,$$

vnde momentum inertiae reſpectu axis I p erit

$$\tfrac{1}{2} M (\beta p^2 - a.\, \beta p + a\,a).$$

Cum igitur ſit $a = \beta\gamma = \beta p + \gamma p$, erit hoc momentum

$$= \tfrac{1}{2} M (\beta p^2 + \beta p.\, \gamma p + \gamma p^2);$$

ſicque

ſicque ſimili modo ab vtroque puncto β et γ pendet, prorſus vti rei natura poſtulat.

Problema 3.

§. 12. *Inter omnes axes per centrum inertiae* I *in plano trianguli tranſeuntes eos determinare, quorum reſpectu momenta inertiae ſint vel maxima vel minima.*

Solutio.

Tab. III. Fig. 3. In ſolutione praecedentis problematis in genere conſiderauimus axem quemcunque I P Q, qui cum recta bc, ideoque cum latere B C, faciebat angulum $b\text{IP} = \Phi$, vnde formauimus angulum $\omega = 180° - \beta - \Phi$, hincque determinauimus momentum inertiae

$$= \tfrac{1}{2} M (cc \text{ ſin. } \omega^2 - ac \text{ ſin. } \Phi \text{ ſin. } \omega + aa \text{ ſin. } \Phi^2).$$

Nunc ergo quaeſtio huc redit: quantum angulum Φ accipi oporteat, vt momentum prodeat vel maximum vel minimum; vnde, cum ſoli anguli Φ et ω ſint variabiles, differentiale iſtius formulae nihilo aequetur, vnde iſta reſultat aequatio:

$$0 = 2ccd\omega \text{ ſin. } \omega \text{ coſ. } \omega - acd\omega \text{ ſin. } \Phi \text{ coſ. } \omega$$
$$- acd\Phi \text{ ſin. } \omega \text{ coſ. } \Phi + 2aad\Phi \text{ ſin. } \Phi \text{ coſ. } \Phi,$$

quare cum ſit $d\omega = -d\Phi$, habebimus,

$$-2cc \text{ ſin. } \omega \text{ coſ. } \omega + ac \text{ ſin. } \Phi \text{ coſ. } \omega$$
$$- ac \text{ ſin. } \omega \text{ coſ. } \Phi + 2aa \text{ coſ. } \Phi \text{ ſin. } \Phi = 0.$$

ſiue ob

$$ac (\text{ſin. } \Phi \text{ coſ. } \omega - \text{ſin. } \omega \text{ coſ. } \Phi) = ac \text{ ſin. } (\Phi - \omega) \text{ et}$$
$$2 \text{ ſin. } \omega \text{ coſ. } \omega = \text{ſin. } 2\omega \text{ et } 2 \text{ ſin. } \Phi \text{ coſ. } \Phi = \text{ſin. } 2\Phi,$$

prodi-

prodibit haec aequatio:

$$0 = -cc\,\text{ſin.}\,2\omega + ac\,\text{ſin.}\,(\Phi - \omega) + aa\,\text{ſin.}\,2\Phi.$$

Hic autem erit

$$\Phi - \omega = 2\Phi + \beta - 180°, \text{ vnde fit}$$
$$\text{ſin.}\,(\Phi - \omega) = -\,\text{ſin.}\,2\Phi\,\text{coſ.}\,\beta - \text{coſ.}\,2\Phi\,\text{ſin.}\,\beta, \text{ et}$$
$$\text{ſin.}\,2\omega = -\,\text{ſin.}\,2\Phi\,\text{coſ.}\,2\beta - \text{coſ.}\,2\Phi\,\text{ſin.}\,2\beta;$$

quibus valoribus ſubſtitutis noſtra aequatio fiet

$$0 - cc\,\text{ſin.}\,2\Phi\,\text{coſ.}\,2\beta + cc\,\text{ſin.}\,2\beta\,\text{coſ.}\,2\Phi$$
$$-ac\,\text{ſin.}\,2\Phi\,\text{coſ.}\,\beta - ac\,\text{coſ.}\,2\Phi\,\text{ſin.}\,\beta + aa\,\text{ſin.}\,2\Phi,$$

vnde colligitur

$$\text{tang.}\,2\Phi = \frac{ac\,\text{ſin.}\,\beta - cc\,\text{ſin.}\,2\beta}{aa - ac\,\text{coſ.}\,\beta + cc\,\text{coſ.}\,2\beta},$$

quocirca pro angulo Φ duo reperientur valores, quorum alter pro momento inertiae maximo, alter vero pro momento minimo valebit; atque ambo axes hinc nati inter ſe erunt normales. Quod ſi enim ſuper recta bc conſtruatur angulus $bIv = 2\Phi$, tum rectae IE et IF, angulos bIv et cIv biſecantes, erunt ambo axes principales quaeſiti; tum vero ſi pro vtroque valore Φ capiatur angulus $\omega = 180° - \beta - \Phi$, erit momentum inertiae reſpectu amborum horum axium Tab. III. Fig. 5.

$$= \tfrac{1}{2}M\,(cc\,\text{ſin.}\,\omega^2 - ac\,\text{ſin.}\,\Phi\,\text{ſin.}\,\omega + aa\,\text{ſin.}\,\Phi^2)$$

quorum alterum erit maximum alterum vero minimum.

Corollarium 1.

§. 14. Statuamus breuitalis gratia

$$ac\,\text{ſin.}\,\beta - cc\,\text{ſin.}\,2\beta = A \text{ et } aa - ac\,\text{coſ.}\,\beta + cc\,\text{coſ.}\,2\beta = B,$$

vt ſit tang. $2\Phi = \frac{A}{B}$, tum vero ponatur

$$\sqrt{(AA + BB)} = \Delta;$$

qui valor cum poſſit eſſe tam negatiuus quam poſitiuus, ad omnem ambiguitatem euitandam hic tantum eius valorem poſitiuum conſideremus, quippe ex quo alterum momentum facillime deducetur, loco $+\Delta$ ſcribendo $-\Delta$. Hinc igitur ſtatim habemus

$$\text{ſin. } 2\Phi = \frac{A}{\Delta} \text{ et coſ. } 2\Phi = \frac{B}{\Delta},$$

vnde cum ſit

$$\text{tang. } \Phi = \frac{\text{ſin. } 2\Phi}{1 + \text{coſ. } 2\Phi} = \frac{1 - \text{coſ. } 2\Phi}{\text{ſin. } 2\Phi}, \text{ erit}$$

$$\text{tang. } \Phi = \frac{A}{\Delta + B} = \frac{\Delta - B}{A}.$$

Corollarium 2.

§. 15. Nunc igitur quoque hos valores in expreſſionem pro momento inertiae inuentam, quae erat

$$= \tfrac{1}{2} M (cc \text{ ſin. } \omega^2 - ac \text{ ſin. } \Phi \text{ ſin. } \omega + aa \text{ ſin. } \Phi^2)$$

introducamus, et cum ſit

$$\text{ſin. } \Phi^2 = \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2} \text{coſ. } 2\Phi, \text{ erit ſin. } \Phi^2 = \tfrac{1}{2} - \frac{B}{2\Delta} = \frac{\Delta - B}{2\Delta};$$

deinde ob

$$\text{ſin. } \omega^2 = \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2} \text{coſ. } 2\omega = \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2} \text{coſ. } (2\beta + 2\Phi)$$
$$= \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2} (\text{coſ. } 2\beta \text{ coſ. } 2\Phi - \text{ſin. } 2\beta \text{ ſin. } 2\Phi)$$

erit

$$\text{ſin. } \omega^2 = \frac{\Delta - B \text{ coſ. } 2\beta + A \text{ ſin. } 2\beta}{2\Delta};$$

Denique cum ſit

$$\text{ſin. } \Phi \text{ ſin. } \omega = \tfrac{1}{2} \text{coſ. } (\omega - \Phi) - \tfrac{1}{2} \text{coſ. } (\omega + \Phi)$$
$$= -\tfrac{1}{2} \text{coſ. } (\beta + 2\Phi) + \tfrac{1}{2} \text{coſ. } \beta$$
$$= \tfrac{1}{2} \text{coſ. } \beta - \tfrac{1}{2} \text{coſ. } \beta \text{ coſ. } 2\Phi + \tfrac{1}{2} \text{ſin. } \beta \text{ ſin. } 2\Phi$$

erit

erit

$$\text{ſin.}\,\Phi\ \text{ſin.}\,\omega = \frac{\Delta\ \text{coſ.}\,\beta - B\ \text{coſ.}\,\beta + A\ \text{ſin.}\,\beta}{2\,\Delta};$$

quibus valoribus ſubſtitutis prodibit momentum inertiae ita expreſſum:

$$\tfrac{M}{4\Delta}\,(\Delta\,(aa - ac\,\text{coſ.}\,\beta + cc) - A\,(ac\,\text{ſin.}\,\beta - cc\,\text{ſin.}\,2\beta)$$
$$- B\,(aa - ac\,\text{coſ.}\,\beta + cc\,\text{coſ.}\,2\beta)),$$

vbi cum ſit

$$ac\,\text{ſin.}\,\beta - cc\,\text{ſin.}\,2\beta = A \quad \text{et} \quad aa - ac\,\text{coſ.}\,\beta + cc\,\text{coſ.}\,2\beta = B$$

erit momentum inertiae

$$= \tfrac{M}{4\Delta}\,(\Delta\,(aa - ac\,\text{coſ.}\,\beta + cc) - AA - BB)$$
$$= \tfrac{1}{4}M\,(aa - ac\,\text{coſ.}\,\beta + cc) - \Delta).$$

Sicque ſumto Δ poſitiuo hoc momentum inertiae erit minimum, at ſumto Δ negatiuo habebitur momentum inertiae maximum

$$= \tfrac{1}{4}M\,(aa - ac\,\text{coſ.}\,\beta + cc + \Delta).$$

Corollarium 3.

§. 16. Supra autem inuenimus, reſpectu axis ad planum trianguli in I normalis, momentum inertiae

$$= \tfrac{1}{2}M\,(aa - ac\,\text{coſ.}\,\beta + cc),$$

cui ergo ſumma duorum reliquorum momentorum, quae hic inuenimus, eſt aequalis; quam proprietatem pro omnibus figuris planis ſemper locum habere demonſtraui in *theoria motus corporum rigidorum.*

Scholion.

§. 17. Quod ſi tam poſitionem axium principalium quam eorum momenta inertiae per calculum

expedire velimus, formulae hic inuentae ſatis idoneae videntur. Verum ſi conſtructionem geometricam deſideremus, iſtae formulae nos in maximas ambages praecipitarent, cuius incommodi ratio ſine dubio in hoc eſt ſita: quod praeter baſin trianguli $BC = 3a$, pro qua inclinationem axium principalium quaeſiuimus, alterum tantum latus $AB = 3c$, cum angulo β in calculum introduximus, cum pari iure alterum latus $AC = 3b$, cum angulo γ introduci potuiſſet, vnde plerumque ſolutiones parum idoneae reperiri ſolent; quamobrem, vt iſtam ambiguitatem e medio tollamus, loco lateris AB rectam AI cum angulo quam cum baſi BC facit, in calculum introducamus, quandoquidem haec recta ſimili modo ad vtrumque latus AB et AC refertur, id quod in ſequente Problemate exſequemur.

Scholion 2.

§. 18. Quemadmodum poſitio axium principalium, ſiue angulus Φ aeque refertur ad ambo latera AB et AC, ita manifeſtum eſt ipſa momenta inertiae ad omnia tria latera trianguli aequaliter referri debere. Ad quod oſtendendum, cum ſit

$$ac \operatorname{coſ.} \beta = \tfrac{1}{2}(aa + cc - bb),$$

iam ſupra obſeruauimus eſſe

$$aa - ac \operatorname{coſ.} \beta + cc = \tfrac{1}{2}(aa + bb + cc),$$

ſicque prior pars momentorum inertiae iam aequaliter ex literis a, b, c, eſt compoſita. Neceſſe igitur eſt, vt etiam pars altera Δ aequaliter has literas a, b, c inuoluat; Cum igitur ſit $\Delta\Delta = AA + BB$, loco A et B ſubſtituamus

tuamus aſſumtos valores, ac prodibit

$$\Delta\Delta = a^4 - 2a^3c\,\text{coſ.}\beta + aacc(3\,\text{coſ.}\beta^2 - \text{ſin.}\beta^2) - 2ac^3\text{coſ.}\beta + c^4.$$

Auferatur vtrinque $(aa - ac\,\text{coſ.}\beta + cc)^2$, eritque

$$\Delta\Delta - \tfrac{1}{4}(aa + bb + cc)^2 = -3aacc\,\text{ſin.}\beta^2;$$

quare cum ſit

$$ac\,\text{coſ.}\beta = \tfrac{1}{2}(aa + cc - bb), \text{ erit}$$

$$aacc\,\text{coſ.}\beta^2 = \tfrac{1}{4}(a^4 + b^4 + c^4 + 2aacc - 2aabb - 2ccbb$$

tum vero

$$aacc\,\text{ſin.}\beta^2 = \tfrac{1}{4}(a^4 + b^4 + c^4 - 2aacc - 2aabb - 2bbcc),$$

vbi omnes tres literae a, b, c, aequaliter occurrunt, quo valore ſubſtituto reperietur

$$\Delta\Delta = a^4 + b^4 + c^4 - aabb - aacc - bbcc,$$

ita vt ſit

$$\Delta = \sqrt{(a^4 + b^4 + c^4 - aabb - aacc - bbcc)},$$

conſequenter ambo momenta principalia ita exprimentur, vt ſit.

Minimum:

$$\tfrac{1}{8}M(aa + bb + cc - 2\sqrt{(a^4 + b^4 + c^4 - aabb - aacc - bbcc)}),$$

Maximum:

$$\tfrac{1}{8}M(aa + bb + cc + 2\sqrt{(a^4 + b^4 + c^4 - aabb - aacc - bbcc)}).$$

Problema.

§. 19. *Formulam pro angulo Φ in praecedente problemate inuentam ita transformare, vt ad conſtructionem geometricam apta reddatur.*

Solutio.

Quoniam Φ denotat angulum b I P, quo axis principalis I P ad rectam b I, lateri B C parallelam, inclinatur, is aeque reſpicit latus A C $= 3\,b$ cum angulo A C B $= \gamma$, ac latus A B $= 3\,c$ cum angulo A B C $= \beta$, exiſtente latere B C $= 3\,a$: formulam inuentam

$$\text{tang. } 2\,\Phi = \frac{a\,c\,\text{ſin.}\,\beta - c\,c\,\text{ſin.}\,2\,\beta}{a\,a - a\,c\,\text{coſ.}\,\beta + c\,c\,\text{coſ.}\,\beta},$$

ita transformemus, vt in eam ambo latera A C et B C cum angulis β et γ aequaliter ingrediantur. Hunc in finem ex centro inertiae I ductam concipiamus rectam I a, lateri A C parallelam, vt obtineamus triangulum I $b\,a$, toti triangulo A B C ſimile, cuius latera ſint triplo minora, ſcilicet I $b = a$; I $a = b$ et $a\,b = c$, et anguli $a\,b$ I $= \beta$ et a I $b = \gamma$. Tum vero ſi ex a in baſin I b demittatur perpendiculum $a\,d$, erit c ſin. $\beta = b$ ſin. $\gamma = a\,d$, et quia $b\,d = c$ coſ. β et I $d = b$ coſ. γ, erit $a = c$ coſ β $+ \, b$ coſ. γ. Hic iam valor loco a in numeratore noſtrae formulae:

Tab. III. Fig. 6.

$$a\,c\,\text{ſin.}\,\beta - c\,c\,\text{ſin.}\,2\,\beta = a\,c\,\text{ſin.}\,\beta - 2\,c\,c\,\text{ſin.}\,\beta\,\text{coſ.}\,\beta,$$

ſubſtitutus praebet

$$-\,c\,c\,\text{ſin.}\,\beta\,\text{coſ.}\,\beta + b\,c\,\text{ſin.}\,\beta\,\text{coſ.}\,\gamma,$$

in cuius poſteriore membro loco c ſin. β ſcribatur b ſin. γ, ſicque numerator noſter induet hanc formam: $b\,c\,(\text{ſin.}\,\beta - \gamma)$. Simili modo pro denominatore retenta parte prima $a\,a$, ex parte altera

$$-\,a\,c\,\text{coſ.}\,\beta + c\,c\,\text{coſ.}\,2\,\beta = -\,a\,c\,\text{coſ.}\,\beta + c\,c\,\text{coſ.}\,\beta^2 - c\,c\,\text{ſin.}\,\beta^2,$$

ſi loco a valor ante datus ſcribatur, reperietur:

$$-\,b\,c\,\text{coſ.}\,\beta\,\text{coſ.}\,\gamma - c\,c\,\text{ſin.}\,\beta^2,$$

cuius poſtremus terminus, ob c ſin. $\beta = b$ coſ. γ, fit $- b c$ ſin. β ſin. γ, ita vt haec pars fiat $- b c$ coſ. $(\beta - \gamma)$, hincque totus denominator $= a a - b c$ coſ. $(\beta - \gamma)$, vnde formula noſtra nunc habebit hanc formam:

$$\text{tang. } 2\Phi = \frac{b c \text{ ſin. } (\beta - \gamma)}{a a - b c \text{ coſ. } (\beta - \gamma)};$$

quae, ſi breuitatis gratia ſumatur $\frac{b c}{a} = e$, abibit in hanc:

$$\text{tang. } 2\Phi = \frac{e \text{ ſin. } (\beta - \gamma)}{a - e \text{ coſ. } (\beta - \gamma)}.$$

Pro qua conſtruenda abſcindatur angulus $a b e = a \mathrm{I} d = \gamma$, et capiatur $b e = \frac{b c}{a} = e$, iunctaque recta $\mathrm{I} e$ erit angulus $b \mathrm{I} e = 2\Phi$. Cum enim ſit angulus $a b e = \gamma$, erit angulus $\mathrm{I} b e = \beta - \gamma$. Hinc ſi ex e in $b \mathrm{I}$ demittatur perpendiculum $e p$, ob $b e = e$ erit hoc perpendiculum

$$e p = e \text{ ſin. } (\beta - \gamma) \text{ et } b p = e \text{ coſ. } (\beta - \gamma),$$

vnde fit

$$\mathrm{I} p = a - e \text{ coſ. } (\beta - \gamma);$$

ſicque prodibit tangens anguli $b \mathrm{I} e$, hoc eſt

$$\frac{e p}{\mathrm{I} p} = \frac{e \text{ ſin. } (\beta - \gamma)}{a - e \text{ coſ. } (\beta - \gamma)} = \text{tang. } 2\Phi.$$

Vnde patet hunc angulum $b \mathrm{I} e$ eum ipſum eſſe, quem quaerimus, qui ergo ſi biſecetur recta IM, erit IM alter axis principalis, cuius reſpectu momentum inertiae eſt minimum, alter vero axis IN ad iſtum IM erit normalis, eiusque reſpectu momentum inertiae erit maximum.

Corollarium I.

§. 20. Quo haec conſtructio magis ad morem Geometrarum adornetur, triangulo $\mathrm{I} a b$ circumſcribatur circulus, in quo capiatur arcus $a f = a b$, vt fiat angulus Tab. III. Fig. 7.

$a b f$

$abf = \gamma$, ideoque $Ibf = \beta - \gamma$. Porro abſcindatur arcus $b\gamma = aI$, vt ducta recta ag fiat angulus $bag = \beta$, eritque interſectio rectarum bf et ag ipſum punctum e figurae praecedentis. Cum enim in triangulo abe ſit angulus $abe = \gamma$ et angulus $bae = \beta$, erit triangulum abe ſimile toti triangulo bIa; vnde prodit iſta proportio $Ib : Ia = ab : be$, hoc eſt in literis $a : b = c : \frac{bc}{a} = e$, ſicque eſt $be = e = \frac{bc}{a}$, et ducta recta Ie prodit angulus $bIe = 2\Phi$.

Corollarium 2.

§. 21. Si triangulum propoſitum fuerit Iſoſceles, et latus $Ia = ab$, erunt etiam anguli β et γ aequales; vnde ſtatim fit tang. $2\Phi = 0$, ideoque vel $2\Phi = 0$ vel $2\Phi = 180$; quamobrem hoc caſu prior axis IM in ipſam lineam Ib incidit, ſeu baſi BC erit parallelus, alter vero illi erit normalis. Hinc quia $c = b$ erit

$$\sqrt{(a^4 + b^4 + c^4 - aabb - aacc - bbcc)} = aa - bb,$$

hincque vel $\Delta = aa - bb$ vel $\Delta = bb - aa$, prouti fuerit vel $a > b$ vel $b > a$. Priori igitur caſu, quo $a > b$, erit momentum inertiae prius $\frac{1}{8}M(4bb - aa)$, poſterius vero $\frac{3}{8}Maa$. Caſu vero quo $be > aa$ prius momentum inertiae fit $\frac{3}{8}Maa$, poſterius vero maius $\frac{1}{8}M(4bb - aa)$.

Corollarium 3.

§. 22. Quod ſi triangulum fuerit plane aequilaterum, vt ſit $a = b = c$, quia tum fit tang. $2\Phi = \frac{0}{0}$, ipſe angulus Φ plane non determinatur, ſed omnes plane rectae per centrum inertiae I ducta vicemgerent axium principalium,

palium, quorum reſpectu omnia momenta inertiae erunt $= \frac{3}{4} M a a$; quemadmodum etiam in omnibus corporibus, in quibus duo momenta inertiae principalia inter ſe fiunt aequalia, vſu venire obſeruaui, quippe quo caſu infiniti axes principales locum habent.

Alia ſolutio eiusdem problematis.

§. 23. Conſideremus hic ipſum triangulum propoſitum ABC, cuius latera poſita ſunt $AB = 3c$, $AC = 3b$, $BC = 3a$, anguli vero $BAC = \alpha$, $ABC = \beta$, $BCA = \gamma$; tum vero ducta baſi BC per centrum inertiae I parallela bc, pro vno axe principali IM poſuimus angulum $bIM = \Phi$, et inuenimus Tab. III. Fig. 8.

$$\text{tang. } 2\Phi = \frac{ac \text{ ſin. } \beta - cc \text{ ſin. } 2\beta}{aa - ac \text{ coſ. } \beta + cc \text{ coſ. } 2\beta}.$$

Nunc vero ducamus per I rectam AIF, quae baſin BC biſecabit in F, vt ſit $BF = CF = \frac{3}{2}a$, et vocemus hanc rectam $AF = 3f$, at angulum $AFC = \zeta$, eritque

$$3b : 3f = \text{ſin. } \zeta : \text{ſin. } \beta, \text{ hincque}$$

$$b \text{ ſin. } \beta = f \text{ ſin. } \zeta; \text{ tum vero erit}$$

$$AF^2 = AB^2 + BF^2 - 2 AB . BF \text{ coſ. } \beta, \text{ hoc eſt}$$

$$ff = cc + \frac{1}{4} aa - ac \text{ coſ. } \beta,$$

vnde fit

$$ac \text{ coſ. } \beta = cc + \frac{1}{4} aa - ff.$$

Deinde erit ſimili modo

$$cc = ff + \frac{1}{4} aa + af \text{ coſ. } \zeta;$$

quo valore ſubſtituto fit

$$ac \text{ coſ. } \beta = \frac{1}{2} aa + af \text{ coſ. } \zeta,$$

quae aequatio per c ſin. $\beta = f$ ſin. ζ diuiſa praebet

$$\cot.\beta = \frac{a + 2f\,\text{cof.}\,\zeta}{2f\,\text{fin.}\,\zeta}.$$

Imprimis autem notentur iſti valores:

$$c\,\text{fin.}\,\beta = f\,\text{fin.}\,\zeta \quad \text{et} \quad c\,\text{cof.}\,\beta = \tfrac{1}{2}a + f\,\text{cof.}\,\zeta,$$

quorum ratio ex figura faciliime patet, hincque erit

$$2cc\,\text{fin.}\,\beta\,\text{cof.}\,\beta = cc\,\text{fin.}\,2\beta = af\,\text{fin.}\,\zeta + 2ff\,\text{fin.}\,\zeta\,\text{cof.}\,\zeta = af\,\text{fin.}\,\zeta + f^2\,\text{fin.}\,2\zeta,$$

deinde

$$cc\,\text{cof.}\,\beta^2 - cc\,\text{fin.}\,\beta^2 = cc\,\text{cof.}\,2\beta = \tfrac{1}{4}aa + af\,\text{cof.}\,\zeta + ff\,\text{cof.}\,2\zeta.$$

Subſtituantur igitur iſti valores in noſtra formula pro tang. 2ϕ inuenta, ac prodibit numerator:

$$ac\,\text{fin.}\,\beta - cc\,\text{fin.}\,2\beta = -ff\,\text{fin.}\,2\zeta$$

et denominator:

$$aa - ac\,\text{cof.}\,\beta + cc\,\text{cof.}\,2\beta = \tfrac{3}{4}aa + ff\,\text{cof.}\,2\zeta,$$

ſicque erit

$$\text{tang.}\,2\phi \frac{-ff\,\text{fin.}\,2\zeta}{\tfrac{3}{4}aa + ff\,\text{cof.}\,2\zeta}.$$

Nunc etiam poſitionem axis IM ad rectam AF referamus, ponendo angulum AIM $= \psi$, vt fit $\psi = 180° - \phi - \zeta$, ideoque $2\psi = 360° - 2\zeta - 2\phi$, vnde fit

$$\text{tang.}\,2\psi = -\text{tang.}(2\zeta + 2\phi) = \frac{-\text{tang.}\,2\zeta - \text{tang.}\,2\phi}{1 - \text{tang.}\,2\zeta.\,\text{tang.}\,2\phi}.$$

Quod ſi iam hic loco tang. 2ϕ valor modo inuentus ſubſtituatur, reperietur

$$\text{tang.}\,2\psi = \frac{-\tfrac{3}{4}aa\,\text{tang.}\,2\zeta}{\tfrac{3}{4}aa + ff\,\text{cof.}\,2\zeta + ff\,\text{fin.}\,2\zeta\,\text{tang.}\,2\zeta};$$

eſt vero

$$ff(\text{cof.}\,2\zeta + \text{fin.}\,2\zeta\,\text{tang.}\,2\zeta) = \frac{ff}{\text{cof.}\,2\zeta},$$

vnde

vnde ſupra et infra per coſ. 2ζ multiplicando prodibit

$$\text{tang. } 2\psi = \frac{-\frac{3}{4} a a \text{ ſin. } 2\zeta}{\frac{3}{4} a a \text{ coſ. } 2\zeta + ff},$$

quam ergo conſtrui oportet, atque hinc deriuatur ſequens

Conſtructio.

§. 24. *Capiatur angulus* A F E $= 180° - 2\zeta$, *ipſa autem recta* F E $= \frac{3aa}{4f}$; *tum iungatur recta* I E, *et ambo anguli* A I E *et* F I E *biſecentur rectis* I M *et* I N, *quae erunt ambo axes principales noſtri trianguli.* Tab. III. Fig. 9.

Demonſtratio.

Vocemus angulum A F E $= 2\eta$, vt ſit $2\zeta = 180° - 2\eta$, quo valore adhibito fit

$$\text{tang. } 2\psi = \frac{-\frac{3}{4} a a \text{ ſin. } 2\eta}{-\frac{3}{4} a a \text{ coſ. } 2\eta + ff} = \frac{\frac{3}{4} a a \text{ ſin. } 2\eta}{\frac{3}{4} a a \text{ coſ. } 2\eta - ff},$$

tum vero ponatur recta F E $= \frac{3aa}{4f} = e$, vt fiat

$$\text{tang. } 2\psi = \frac{e \text{ ſin. } 2\eta}{e \text{ coſ. } 2\eta - f};$$

quare ſi ex E in A F ducatur normalis E P, erit

$$\text{E P} = e \text{ ſin. } 2\eta \text{ et F P} = e \text{ coſ. } 2\eta;$$

Ergo cum ſit F I $= f$, erit I P $= e$ coſ $2\eta - f$, ſicque manifeſto erit

$$\text{tang. A I E} = \frac{e \text{ ſin. } 2\eta}{e \text{ coſ. } 2\eta - f} = \text{tang. } 2\psi;$$

conſequenter quia angulus A I E $= 2\psi$, eo biſecto erit A I M $= \psi$, ſicque haec recta I M erit alter axis principalis; alter vero I N, qui ad hunc eſt normalis, reperitur biſecando angulum F I E. Q. E. D.

Corollarium 1.

§. 25. Quo hanc conſtructionem magis ad Praxin accommodemus, iterum triangulo A B C circumſcribatur circulus, vt in figura repraeſentatur, vbi recta A F producatur vsque ad circulum in D; et cum ſit A F. F D $=$ B F. F C $=$ B F², erit $3f$. F D $= \frac{9}{4} aa$, vnde F D $= \frac{3aa}{4f}$, ſicque haec linea F D aequatur noſtrae lineae F E in figura praecedente. Cum igitur hic ſit angulus B F D $= \zeta$, ex D in B C agatur normalis, quae vlterius in E producatur, vt fiat D G $=$ G E, eritque iungendo puncta F et E, F E $=$ F D et angulus B F E $=$ B F D $= \zeta$, ideoque B F E $= 2\zeta$, ſicque erit angulus A F E $= 180° - 2\zeta$, quemadmodum in conſtructione aſſumſimus, ita vt ſit F E $= e$ et angulus A F E $= 2\eta$, vnde ducta recta I E manifeſto fit angulus A I E $= 2\psi$. Caeterum non opus eſt ducere rectam D E, quoniam punctum E facilius determinabitur, ſi ex punctis B et C circini interuallis B D et C D fiat interſectio, quae cadet in ipſum punctum E, quamobrem haec conſtructio ob ſummam ſimplicitatem longe praeferenda videtur.

Tab. III. Fig. 10.

Corollarium 2.

§. 26. Quemadmodum ambo axes principales in hac conſtructione ad rectam I A ſunt definiti, ita neceſſe eſt, vt ſi ſimilis conſtructio ad rectas I B et I C accommodetur, eadem axium principalium poſitio reperiatur, quae convenientia ex ſolis principiis geometricis non niſi per maximas ambages oſtendi poſſe videtur. Quamobrem ſequens Theorema eo maiore attentione dignum eſſe arbitror.

Theo-

Theorema geometricum.

§. 27. Si triangulo A B C circumſcribatur circulus, in eoque ex angulis A B C ducantur chordae A a, B b, C c, latera oppoſita B C, A C et A B, biſecantes in punctis D, E et F, quae ſe mutuo ſecent in puncto I; tum vero notentur puncta α, β, γ, ita vt ſint interualla Tab. III. Fig. 11.

$$\text{I.}\ \begin{matrix} B\alpha = Ba \\ C\alpha = Ca \end{matrix} \quad \text{II.}\ \begin{matrix} A\alpha = Ab. \\ C\beta = Cb \end{matrix} \quad \text{III.}\ \begin{matrix} A\gamma = Ac \\ B\gamma = Bc \end{matrix}$$

iunganturque rectae I α I β et I γ; his factis binae rectae M I M et m I m, quae angulos A I α et a I α biſecant, quoque angulos B I β et b I β, itemque C I γ et c I γ biſecabunt.

Scholion.

§. 28. Hactenus quidem ambos axes principales ex principio indirecto, quo eorum reſpectu momenta inertiae ſunt vel maxima vel minima, determinauimus, quandoquidem demonſtraui, his caſibus etiam in omnibus corporibus vires centrifugas, ſi corpora circa hos axes motu gyratorio ferantur, ſe mutuo deſtruere, ita vt non opus ſit hos axes ab vlla vi externa ſuſtineri, in quo vtique conſiſtit principium directum, ex quo axes principales definiri conuenit, quamobrem non incongruum videtur, ex eodem principio directo axes trianguli principales determinare. Ac primo quidem quod ad axem ad planum trianguli normalem attinet, per ſe manifeſtum eſt, ſi triangulum circa hunc axem gyraretur, tum omnes vires centrifugas, quoniam eidem puncto I, ſcilicet centro inertiae, erunt applicatae, ſe mutuo in aequilibrio eſſe ſervaturas

vaturas. Pro binis igitur reliquis axibus in ipſo plano trianguli ſitis ſupereſt, vt eorum poſitionem ex eodem principio directo determinemus.

Problema.

Tab. III. Fig. 3. §. 29. *Propoſito quocunque triangulo materiali* ABC, *in eius plano binos axes principales ex principio directo, quo omnes vires centrifugae ſe mutuo deſtruere debent, inueſtigare.*

Solutio.

Maneant omnes denominationes, vti ſupra in Problemate ſecundo ſunt conſtitutae, ſcilicet: $AB = 3c$, $AC = 3b$, $BC = 3a$, et angulus $ABC = \beta$; tum vero ducta baſi parallela bc, vt ſit $Bb = \frac{1}{3}AB = b$, ita vt in eius puncto medio I ſit centrum inertiae trianguli, erit $Ib = a$. Iam ſit recta IPQ vnus axium principalium, ponaturque angulus $bIP = \Phi$, et angulus

$$IPb = 180° - \beta - \Phi = \omega,$$

vt ſit

$$bP = \frac{a\,\text{ſin.}\,\Phi}{\text{ſin.}\,\omega} \text{ et } IP = \frac{a\,\text{ſin.}\,\beta}{\text{ſin.}\,\omega}.$$

Nunc pro noſtra inueſtigatione ex puncto indefinito X agatur baſi BC parallela XZ, axi occurrens in Q; ac vocato interuallo $AX = x$ erit $XZ = \frac{ax}{c}$; hinc quia $bX = 2c - x$, erit

$$PX = 2c - x - \frac{a\,\text{ſin.}\,\Phi}{\text{ſin.}\,\omega} \text{ et } XQ = \frac{(2c - x)\,\text{ſin.}\,\omega}{\text{ſin.}\,\Phi} - a,$$

quod breuitatis gratia ponatur $= q$. Praetera vero erit

$$PQ = \frac{(2c - x)\,\text{ſin.}\,\beta}{\text{ſin.}\,\Phi} - \frac{a\,\text{ſin.}\,\beta}{\text{ſin.}\,\omega}, \text{ vnde fit recta}$$

IQ

$$IQ = \frac{(2c - x)\,\text{ſin.}\,\beta}{\text{ſin.}\,\Phi},$$

quae breuitatis gratia vocetur $= p$. Nunc in recta XZ capiatur indefinite interuallum $XY = y$, et ex Y in axem IQ demittatur perpendiculum YR, vnde ob $QY = q + y$ et angulum ad $Q = \Phi$ erit

$$YR = (q + y)\,\text{ſin.}\,\Phi \text{ et } QR = (q + y)\,\text{coſ.}\,\Phi,$$

hincque interuallum $IR = p - (q + y)\,\text{coſ.}\,\Phi$. His poſitis quocunque motu triangulum circa axem IQ gyretur, vis centrifuga puncti Y ab axe erit vt interuallum RY, in qua directione etiam ponatur ab axe recedere. Ponamus igitur hanc vim centrifugam eſſe $\alpha(q + y)\,\text{ſin.}\,\Phi$, quae, quia axis per centrum inertiae tranſit, per totum triangulum ſe mutuo ſponte deſtruet. Praeterea vero neceſſe eſt, vt etiam momenta harum virium reſpectu puncti I euaneſcant; momentum autem puncti I erit

$$\alpha(q + y)\,\text{ſin.}\,\Phi\,(p - (q + y)\,\text{coſ.}\,\Phi),$$

quod euolutum dat

$$\alpha p(q + y)\,\text{ſin.}\,\Phi - \alpha(q + y)^2\,\text{ſin.}\,\Phi\,\text{coſ.}\,\Phi.$$

Concipiamus nunc elementum lineare $Yy = dy$, quod in iſtam formulam ductum et integratum praebet

$$\alpha pqy\,\text{ſin.}\,\Phi + \tfrac{1}{2}\alpha pyy\,\text{ſin.}\,\Phi - \alpha qqy\,\text{ſin.}\,\Phi\,\text{coſ.}\,\Phi$$
$$- \alpha qyy\,\text{ſin.}\,\Phi\,\text{coſ.}\,\Phi - \tfrac{1}{3}\alpha y^3\,\text{ſin.}\,\Phi\,\text{coſ.}\,\Phi,$$

quod iam euaneſcit facto $y = 0$. Promoueatur igitur punctum Y in Z, ponendo $y = \frac{ax}{c}$, et momentum pro tota linea XZ erit

$$\frac{\alpha apqx\,\text{ſin.}\,\Phi}{c} + \frac{\alpha a^2pxx\,\text{ſin.}\,\Phi}{2cc} - \frac{\alpha aqqx\,\text{ſin.}\,\Phi\,\text{coſ.}\,\Phi}{c}$$
$$- \frac{\alpha aaqxx\,\text{ſin.}\,\Phi\,\text{coſ.}\,\Phi}{cc} - \frac{\alpha a^3x^3\,\text{ſin.}\,\Phi\,\text{coſ.}\,\Phi}{3c^3}.$$

Promoueatur iam punctum X per elementum dx, et lineae

XZ

XZ tribuatur latitudo dx ſin. β, per eamque momentum modo inuentum multiplicetur, et omiſſo coefficiente α, quippe qui per diuiſionem tolletur in fine calculi, prodibit iſta formula:

$$\frac{apqxdx\,\text{ſin.}\Phi\,\text{ſin.}\beta}{c} + \frac{aapxxdx\,\text{ſin.}\Phi\,\text{ſin.}\beta}{2cc} - \frac{aqqxdx\,\text{ſin.}\Phi\,\text{coſ.}\Phi\,\text{ſin.}\beta}{c}$$
$$- \frac{aaqxxdx\,\text{ſin.}\Phi\,\text{coſ.}\Phi\,\text{ſin.}\beta}{cc} - \frac{a^3x^3dx\,\text{ſin.}\Phi\,\text{coſ.}\Phi\,\text{ſin.}\beta}{2c^3}.$$

Nunc cum ſit

$$p = \frac{(2c - x)\,\text{ſin.}\beta}{\text{ſin.}\Phi} \text{ et } q = \frac{(2c - x)\,\text{ſin.}\omega}{\text{ſin.}\Phi} - a,$$

hincque

$$pq = \frac{(2c - x)^2\,\text{ſin.}\beta\,\text{ſin.}\omega}{\text{ſin.}\Phi^2} - \frac{a(2c - x)\,\text{ſin.}\beta}{\text{ſin.}\Phi},$$

capiatur integrale per partes, ac ſtatim pro toto triangulo ſtatuatur $x = 3c$, reperieturque

$$\int pqxdx = \frac{9c^4\,\text{ſin.}\beta\,\text{ſin.}\omega}{4\,\text{ſin.}\Phi^2},$$
$$\int pxxdx = -\frac{9c^4\,\text{ſin.}\beta}{4\,\text{ſin.}\Phi},$$
$$\int qqxdx = \frac{9c^4\,\text{ſin.}\omega^2}{4\,\text{ſin.}\Phi^2} + \tfrac{9}{2}aacc,$$
$$\int qxxdx = -\frac{9c^4\,\text{ſin.}\omega}{4\,\text{ſin.}\Phi} - 9ac^3,$$
$$\int x^3dx = \tfrac{1}{4}x^4 = \tfrac{81}{4}c^4.$$

Singulae hae formulae per ſuos coefficientes multiplicatae et in vnam ſummam collectae dabunt hanc aequationem:

$$\frac{9ac^3\,\text{ſin.}\beta^2\,\text{ſin.}\omega}{4\,\text{ſin.}\Phi} - \tfrac{9}{2}aacc\,\text{ſin.}\beta^2 - \frac{9ac^3\,\text{coſ.}\Phi\,\text{ſin.}\beta\,\text{ſin.}\omega^2}{4\,\text{ſin.}\Phi}$$
$$- \tfrac{9}{2}a^3c\,\text{ſin.}\Phi\,\text{coſ.}\Phi\,\text{ſin.}\beta + \tfrac{9}{4}aacc\,\text{coſ.}\Phi\,\text{ſin.}\beta\,\text{ſin.}\omega$$
$$+ 9a^3c\,\text{ſin.}\Phi\,\text{coſ.}\Phi\,\text{ſin.}\beta - \tfrac{27}{4}a^3c\,\text{ſin.}\Phi\,\text{coſ.}\Phi\,\text{ſin.}\beta = 0,$$

quae per $9ac$ ſin. β diuiſa abit in hanc:

$$\frac{cc\,\text{ſin.}\beta\,\text{ſin.}\omega}{4\,\text{ſin.}\Phi} - \frac{ac\,\text{ſin.}\beta}{6} - \frac{cc\,\text{coſ.}\Phi\,\text{ſin.}\omega^2}{4\,\text{ſin.}\Phi} - \tfrac{1}{2}aa\,\text{ſin.}\Phi\,\text{coſ.}\Phi$$
$$+ \tfrac{1}{4}ac\,\text{coſ.}\Phi\,\text{ſin.}\omega + aa\,\text{ſin.}\Phi\,\text{coſ.}\Phi - \tfrac{3}{4}aa\,\text{ſin.}\Phi\,\text{coſ.}\Phi = 0$$

vbi cum occurrant triplicis generis termini, vel per aa vel

vel per [illegible], ſingulos ſeorſim exprimamus et per ſin. Φ multiplicemus, ſicque prodibit haec aequatio:

$$-2aa\,\text{coſ.}\,\Phi\,\text{ſin.}\,\Phi^2 + ac(2\,\text{ſin.}\,\Phi\,\text{coſ.}\,\Phi\,\text{ſin.}\,\omega - \text{ſin.}\,\beta\,\text{ſin.}\,\Phi)$$
$$+cc(2\,\text{ſin.}\,\beta\,\text{ſin.}\,\omega - 2\,\text{coſ.}\,\Phi\,\text{ſin.}\,\omega^2) = 0.$$

Cum igitur ſit $\omega = 180 - \beta - \Phi$, erit

$$\text{ſin.}\,\omega = \text{ſin.}\,(\beta + \Phi) = \text{ſin.}\,\beta\,\text{coſ.}\,\Phi + \text{coſ.}\,\beta\,\text{ſin.}\,\Phi,$$

vnde habebitur pro membro ac coefficiens

$$2\,\text{ſin.}\,\beta\,\text{ſin.}\,\Phi\,\text{coſ.}\,\Phi^2 + 2\,\text{coſ.}\,\beta\,\text{ſin.}\,\Phi^2\,\text{coſ.}\,\Phi - \text{ſin.}\,\beta\,\text{ſin}\,\Phi,$$

at membrum cc, quia factorem habet $2\,\text{ſin.}\,\omega$, ita repraeſentetur:

$$2cc\,\text{ſin.}\,\omega\,(\text{ſin}\,\beta - \text{coſ.}\,\Phi\,\text{ſin.}\,\omega),$$

cuius factor poſterior, loco ſin. ω ſubſtituto valore, euadit,

$$\text{ſin.}\,\beta - \text{ſin.}\,\beta\,\text{coſ.}\,\Phi^2 - \text{coſ.}\,\beta\,\text{coſ.}\,\Phi\,\text{ſin.}\,\Phi = \text{ſin.}\,\beta\,\text{ſin.}\,\Phi^2$$
$$-\text{coſ.}\,\beta\,\text{ſin.}\,\Phi\,\text{coſ.}\,\Phi = \text{ſin.}\,\Phi(\text{ſin.}\,\beta\,\text{ſin.}\,\Phi - \text{coſ.}\,\beta\,\text{coſ.}\,\Phi)$$
$$= -\text{ſin.}\,\Phi\,\text{coſ.}\,(\beta + \Phi).$$

Cum igitur ſit $\omega = 180^\circ - \beta - \Phi$, erit $\text{coſ.}\,\omega = -\text{coſ.}\,(\beta + \Phi)$, ideoque poſtremum membrum erit

$$2cc\,\text{ſin.}\,\omega\,\text{ſin.}\,\Phi\,\text{coſ.}\,\omega = cc\,\text{ſin.}\,\Phi\,\text{ſin.}\,2\omega,$$

quod ob $2\omega = 360^\circ - 2\beta - 2\Phi$ dat

$$\text{ſin.}\,2\omega = -\text{ſin.}\,(2\beta + 2\Phi) = -\text{ſin.}\,2\beta\,\text{coſ.}\,2\Phi - \text{coſ.}\,2\beta\,\text{ſin.}\,2\Phi,$$

ſicque vltimum membrum eſt

$$-cc\,\text{ſin.}\,\Phi\,(\text{ſin.}\,2\beta\,\text{coſ.}\,2\Phi + \text{coſ.}\,2\beta\,\text{ſin.}\,2\Phi);$$

membrum vero medium eſt

$$ac\,\text{ſin.}\,\Phi\,(2\,\text{coſ.}\,\Phi\,\text{ſin.}\,\omega - \text{ſin.}\,\beta),$$

cuius factor poſterior, loco ſin. ω ſcripto valore, fit

$$2\,\text{ſin.}\,\beta\,\text{coſ.}\,\Phi^2 + 2\,\text{coſ.}\,\beta\,\text{ſin.}\,\Phi\,\text{coſ.}\,\Phi - \text{ſin.}\,\beta$$

Cum igitur ſit $2\,\text{coſ.}\,\Phi^2 - 1 = \text{coſ.}\,2\,\Phi$, hic factor poſterior ſit

$$\text{ſin.}\,\beta\,\text{coſ.}\,2\,\Phi + \text{coſ.}\,\beta\,\text{ſin.}\,2\,\Phi,$$

ſicque membrum medium

$$= a\,c\,\text{ſin.}\,\Phi\,(\text{ſin.}\,\beta\,\text{coſ.}\,2\,\Phi + \text{coſ.}\,\beta\,\text{ſin.}\,2\,\Phi).$$

Denique primum membrum reducitur ad hanc formam: $-a\,a\,\text{ſin.}\,\Phi\,\text{ſin.}\,2\,\Phi$, vnde, quia omnia membra iam diuidi poſſunt per $\text{ſin.}\,\Phi$, emerget iſta aequatio:

$$-a\,a\,\text{ſin.}\,2\,\Phi + a\,c\,(\text{ſin.}\,\beta\,\text{coſ.}\,2\,\Phi + \text{coſ.}\,\beta\,\text{ſin.}\,2\,\Phi)$$
$$- c\,c\,(\text{ſin.}\,2\,\beta\,\text{coſ.}\,2\,\Phi + \text{coſ.}\,2\,\beta\,\text{ſin.}\,2\,\Phi = 0,$$

vnde tandem colligimus

$$\frac{\text{ſin.}\,2\,\Phi}{\text{coſ.}\,2\,\Phi} = \text{tang.}\,2\,\Phi = \frac{a\,c\,\text{ſin.}\,\beta - c\,c\,\text{ſin.}\,2\,\beta}{a\,a - a\,c\,\text{coſ.}\,\beta + c\,c\,\text{coſ.}\,2\,\beta},$$

quae eſt eadem aequatio, quam ſupra in Problemate tertio per methodum maximorum et minimorum pro poſitione axium principalium eruimus, vnde egregius conſenſus inter vtramque methodum perſpicitur.

Scholion.

§. 30. Omnia igitur, quae hactenus circa axes principales trianguli cuiuscunque inuenimus, primo redeunt ad poſitionem binorum axium principalium in plano trianguli ſitorum, pro quibus definiendis imprimis notatu digna eſt conſtructio ſatis ſimplex et concinna §. 27. expoſita, vbi rectae M I M et *m* I *m* exhibent binos axes principales, quorum reſpectu momenta inertiae ſunt inventa:

Maxi-

Maximum:

$$\tfrac{1}{8}M(aa+bb+cc+2\sqrt{(a^4+b^4+c^4-aabb-aacc-bbcc)}),$$

Minimum:

$$\tfrac{1}{8}M(aa+bb+cc-2\sqrt{(a^4+b^4+c^4-aabb-aacc-bbcc)}),$$

quorum ſumma $\tfrac{1}{4}M(aa+bb+cc)$, praebet momentum inertiae reſpecta tertii axis principalis, qui plano trianguli in centro inertiae I perpendiculariter inſiſtit. Facile autem eſt quouis caſu diſcernere, vtri priorum binorum axium conueniat vel momentum inertiae maximum vel minimum; quibus inuentis pro quouis alio axe per centrum inertiae I ducto momentum inertiae facillime determinatur, quemadmodum in *Theoria motus corporum rigidorum* fuſius demonſtraui. Si enim non ſolum pro triangulo, ſed etiam pro corpore quocunque, terni axes principales fuerint IF, IG, IH, inter ſe normales, et per centrum inertiae I tranſeuntes; tum vero pro axe IF momentum inertiae fuerit Mff, pro axe $IG = Mgg$, et pro axe $IH = Mhh$, denotante M maſſam totius corporis, hinc pro quouis alio axe IO, ad principales ita conſtituto, vt ſint anguli $FIO = \zeta$, $GIO = \eta$ et $HIO = \theta$, momentum inertiae erit Tab. III. Fig. 12.

$$= Mff\,\text{coſ.}\,\zeta^2 + Mgg\,\text{coſ.}\,\eta^2 + Mhh\,\text{coſ.}\,\theta^2.$$

Perſpicuum autem eſt ſemper fore

$$\text{coſ.}\,\zeta^2 + \text{coſ.}\,\eta^2 + \text{coſ.}\,\theta^2 = 1.$$

DE CVRVARVM IN CONCAMERATIONIBVS IMPVLSV NOVA THEORIA.

Auctore

ANTONIO-MARIO LORGNA.

Quae de Arcuum in Concamerationibus Impulſu hactenus prolata ſunt, incertis admodum principiis innituntur, vt Theoriae nomine inſigniri nullo prorſus modo mereantur. Verae profecto Theoriae ea eſſe debet conditio, id munus, vt, ſi lineis cuiuscunque naturae cunei inferius terminari cenſeantur, incolumi venuſtate Architectonica, actiones vniuerſae ita euoluantur, vt et de firmitate concamerationum varia pro diuerſis curuis, et in ſubiectas Pilas impulſu in omni curuae puncto tuto diiudicari queat. Quod ſane nondum praeſtitum fuiſſe vel ex eo fateri debemus, quod ne in fornicibus quidem ex ipſo circulo, curua famigeratiſſima, genitis, certae detectae ſint impulſuum leges, rationesque, quibus liceat Pilarum contranitentium dimenſiones mathematica apodixi definire. Id tum maximae rei difficultati tribuendum eſſe, inficiabitur nemo, vtpote quae vires hominum, qui in id incubuere, ingenio atque ſagacitate pollentium eluſiſſe videtur, tum ipſimet Methodo, qua ſpartam profundioris indagi-

indaginis, communisque Geometriae, atque Carteſianae Algebrae fines praetergredientem, adorſi ſunt. Eadem prorſus de cauſa fieri, dudum monuit Summus *Eulerus* (vide Comm. noua huiusce Societ. Vol. III.), vt nihil certi habeatur in machinarum doctrina, ſi quando agatur de motu, qui, ſtatu aequilibrii ſublato, conſequi debet. Actiones enim machinarum ex principiis Mechanicae hucusque traditis, et circa Aequilibria virium verſantibus, nullo pacto definiri poſſunt, quin leges motus probe euoluantur; quod certo ſolius ſubtilioris Analyſeos ductu fieri poſſe videtur, impari vulgaris Analyſeos atque Geometriae praeſidio. Factum hinc eſt, vt in re ea ratione pertractanda, ſtudium, operamque conuerterem, qua et Analyſeos ſublimioris indagini peruia foret, et in quacunque vel Ponderum ſuperimpoſitorum, vel Curuarum hypotheſi tractari pateretur. Quo huiusmodi inueſtigationem, non irrito fortaſſe ſucceſſu, perduxerim, nullo penitus aliorum, qui in ſtadio praeceſſere, conamine facem praeferente, quae ſequuntur, patefacient.

Theoriae

Principia mathematica.

§. 1.

I. Concamerationes iam extructas, ſibique commiſſas, per modum vnius, et, ſiue id naturali continuitate fiat, ſiue artificiali, intermixto caemento, tamquam vniforme quoddam continuum, ſupponimus.

II. Arcus proinde in minima elementa reſoluimus, quae veluti cuneolos cenſemus, ſibi inuicem ad Puluinar vsque impoſitos, atque radios oſculi, quibus elementa intercipiuntur, veluti ſecti iuncturas, intelligimus.

III. Cum duo conſiderari ſoleant Arcus, interior alter, alter exterior, vt maxima et naturali generalitate donetur Theoria, interiorem ſemper Arcum deſignabimus veluti fundamentalem, propriamque Fornicis figuram, exteriori a lege vel ſcala ponderum pendente. Tali enim pacto, data curuae natura exterioris, eo ipſo dabitur ponderum lex, et verſa vice, manente interna Fornicis figura.

Haec in genere principia ſunt ſimpliciſſima, quibus tota innititur Theoria. Hinc tum ad cuneos finitae magnitudinis facillimus eſt tranſitus, cum ad Arcuum diverſorum firmitates inter ſe comparandas patefit via, ſitusque definiendos maximae impulſionis, tam pro diuerſa Curuae natura, quam pro vario ſuperincumbente pondere. Quibus omnibus Theoriae munera ita expleri videntur, vt vix quidquam hoc nomine deſiderandum relinquatur. Haec itaque praemittimus Lemmata.

Lemma I.

Tab. IV Fig. 1. §. 2. In triangulo obtuſangulo ABC ſi duo anguli BAC, BCA fuerint infiniteſimi eiusdem ordinis, omnia latera ſunt eiusdem ordinis; atque differentia lateris AC, obtuſo angulo ABC oppoſiti, a ſumma laterum AB, BC obtu-

obtuſum angulum continentium, eſt infinitiſſima ordinis proxime inferioris.

Demonſtratur ex principiis calculi infiniteſimalis.

Lemma II.

§. 3. Si lineae rigidae, grauitate deſtitutae, et quommodolibet ad horizontem inclinatae termini fulcris A, B immobilibus imponantur, atque in C, quod bifariam diuidit lineam A B, applicetur Potentia trahens vel impellens punctum C, directione C D ad A B perpendiculari, actio vis C D aequaliter in terminos diſtribuitur, et fulcrorum puncta A, B ſollicitantur directione ipſi C D parallela. Tab. IV. Fig. 2.

Per ſe eſt manifeſtum.

Lemma III.

§. 4. Si rectae lineae A E, A I, latera bina fuerint Polygoni infinitilateri in qualibet inſcripti curua linea E A I coeuntia in A, atque vires inſuper adſint A C, A B ſollicitantes punctum A, quarum prima A C ſit in directione radii A D circuli oſculantis curuam in A, altera vero iuxta productionem dirigatur latusculi E A, vel ſecundum tangentem ipſius curuae in puncto A, atque ducta B F ſubtenſae A I parallela ſecante radium D A productum in F, completoque parallelogrammo F A H B, reſolui intelligatur vis A B in binas laterales A F, A H, fueritque vis centrifuga A F maior centripeta A C, et componantur demum binae vires A C, A B, dico, vim Fig. 3.

compo-

compoſitam A G intra tangentem A B conſtitui, atque ſubtenſam A I.

Etenim parallelogrammi F A H B latera oppoſita A F, B H ſunt aequalia inter ſe; atque itidem inter ſe aequantur latera oppoſita A C, B G parallelogrammi A C G B. Eſt autem ex hypotheſi A F vel B H maior quam A C vel B G. Quare punctum G intra puncta B et H cadere debet, ideoque diagonalis A G vel vis compoſita ex binis A B, A C intra latera conſtitui A H, A B, vel intra ſubtenſam A I atque tangentem A B. Q. E. D.

Corollarium 1.

§. 5. Cum autem, exiſtente angulo Polygoni infinitilateri E A I infinite obtuſo, anguloque proinde B A I infinitae paruitatis, ſubtenſam A I cum ipſa Tangente A B propemodum confundi cenſeatur, eo magis rectam A G, mediam inter illas, cum alterutra earum coincidere, intelligendum erit.

Corollarium 2.

§. 6. Quod ſi vires A C, vel B H, B G fuerint infiniteſimae, recta B H idem haberi poterit ac infiniteſimus arcus circuli centro A, atque radio A B deſcriptus, et proinde rectae lineae A B, A G, A H aequabuntur inter ſe.

Scholion.

§ 7. Vt a ſimpliciſſimis ordiamur, Fornicem circularem imprimis conſiderabimus, cuius elementa, vel minimi

nimi cuneoli (§. 1. art. 2.), eodem quique pondere onerari concipiuntur. Deinde, interna Fornicis figura (ibid. art. 3.) retenta, cuneolos inuehemus ponderibus onuſtos quauis lege progredientibus. Haec prae ceteris Curua Linea exactiſſime volutanda eſt, vtpote quae in concamerationibus praecipuum habet vſum ab antiquiſſimis temporibus.

Propoſitio 1.

§. 8. Impulſiones tangentiales in Arcu Fornicis circulari in omnibus perimetri punctis aequaliter grauato, definire.

Eſto R′ M S′ figura fornicis propria (§. 1.) ſemicircularis in minima elementa aequalia A B, B E, E Q, etc. A F, F K, etc. reſoluta. Subtendantur Arculi chordis A B, B E, etc. A F, F K, etc., quae Fornicis cuneolos referre aeque ponderantes, ex hypotheſi, concipiantur, dicaturque earum quaelibet ds. Quare ſi per litteram G grauitas ſpecifica fornicis materiei deſignetur, erit pondus cuiusque cuneoli abſolutum $= G\,ds$, vel ſimpliciter ds, ſuffecta vnitate loco conſtantis G, quod in centro grauitatis eiusque ſubtenſae collectum intelligatur, in puncto ſcilicet, quod bifariam diuidit quamque ſubtenſam ex praeſuppoſita vniformi eiusdem denſitate. Cuneum itaque A B, vmbilici vices gerentem, ob ſitum horizonti parallelum, radius circuli L M bifariam et ad angulos rectos diuidit in x. Cum autem eiusdem termini fulcris vel iuncturis (§. 1. Art. 2.) imponantur A, B, atque vim in centro grauitatis x cuneum ſollicitantem in ipſa radii directione x L excerceri manifeſtum ſit, actio ponderis in Tab. IV. Fig. 4.

 termi-

terminos aequaliter diſtribuetur (§. 3.). Quare iuncturae A, B viribus aequalibus vrgebuntur B G, A G′ ipſi A B perpendicularibus, quarum quaelibet erit $\frac{ds}{2}$. Diuidatur porro bifariam in *c* cuneolus A F proximus vmbilico, captaque in verticali linea quantitate *b d*, pondus cunei abſolutum *d s* exprimente, reſoluatur haec de more in binas laterales vires, *b c* cuneo A F perpendicularem, atque *d c* ipſi A F parallelam. Ex duabus hisce viribus altera *d c* terminum vel iuncturam F ſollicitabit directione A F, altera vero *b c* in iuncturas A, F aequaliter diſtribuetur, directione ipſi A F perpendiculari (§. 3.). Quapropter ducta B H ſubtenſae B E normali, atque $= \frac{bc}{2}$, punctum B binis viribus vrgebitur B G, B H, hoc eſt, completo parallelogrammo B H I G, vi compoſita B I. Iam ex puncto I ducatur I C parallela cuneo B E, atque I D parallela vmbilico A B, cuneoque B E producto occurrens in D. Vis B I erit in binas laterales reſoluta B C, B D. Cumque id ipſum circa punctum A confici debeat, manifeſtum eſt binas vires aequales, et contrarias B C, A C′ inter ſe mutuo aequilibrari, atque vtrumque punctum B et A vi vrgeri B D in directione ſubtenſarum B E, A F, hoc eſt iuncturam vtramque E et F. Cum autem ſit B G : B H = 2 B G : 2 B H = *b d* : *b c*; atque *b d* ad *b c* eam rationem habeat quam ſinus totus ad coſinum anguli infiniteſimi *b* L M, vires B G, B H differre inter ſe, perſpicuum eſt, quantitate, ad ſe comparate, infiniteſima, atque ideo inter ſe aequari. Demto vero vtrinque ab angulis rectis E B H, A B G communi angulo H B G, anguli E B G, A B H ſunt inter ſe aequales: et rectae inſuper B G, B H ponuntur aequales. Ergo diagonalis B I

bifariam

biſariam diuidit angulum H B G, ideoque in ipſo propemodum eſt radio circuli B L conſtituta. Quoniam autem, producta E B ad partes B, ob angulum rectum H B E, rectus eſt angulus H B B′, angulusque itidem A B G eſt rectus, ſi vtrinque auferatur communis angulus A B H, anguli qui remanent H B G, B′ B A erunt aequales. Anguli porro H B G, I G B ſimul ſumti duos rectos conficiunt, propter parallelas I G, B H: duosque pariter rectos conficiunt anguli A B E, A B B′. Ergo angulus B G I aequatur angulo infinite obtuſo Polygoni infinitilateri A B E. Quare exiſtentibus angulis aequalibus G B I, G I B infinitae paruitatis, rectae B G, G I ſimul ſumtae infiniteſima, ad ſe habita ratione, quantitate differunt ab recta B I, eidemque aequari poſſunt (§. 2.). Erit igitur $BI = 2BG = AB = BE$. Et eſt praeterea ob parallelas I D, B A, angulus I D B aequalis angulo A B B′ vel B L E. Ergo Triangula B I D, L B E circa communem angulum L B E erunt aequalia, et proinde B L aequabitur ipſi I D. Dicatur itaque radius Circuli $BL = r$, erit vis B D, qua impelluntur iuncturae E, $F = r$. Definita tali pacto impulſione principali B D, reliquas actiones euoluamus. Oſtenſum eſt itaque iuncturam E impelli in directione B E vi $= r$. Verum vis quoque adeſt dc, quam ſiniſtrorſum, vitandae confuſionis gratia conſideravimus, qua in eadem directione ſollicitatur punctum E, quaeque, inſtituta analogia,

$$bd : dc = ds : dc = St : S.\,bLM = La : av,$$

elicitur $= \frac{ds.\,av}{r}$. Ergo iunctura E in directione E D binis viribus ſimul ſumtis vrgebitur, r atque $\frac{ds.\,av}{r}$, hoc eſt vi $r + \frac{ds.\,av}{r}$. Verum et altera computanda eſt vis, qua

qua ad centrum L ſollicitatur punctum E. Nam in primis, ducta E o aequali et parallela ipſi B H, oſtenſum eſt actiones partiales vis $b\,c$ aequaliter in terminos diſtributae B et E, eſſe debere B H atque E o. Praeterea, vi abſoluta $g\,m$ centri grauitatis Cunei proximi F K in binas laterales vires, de more, itidem reſoluta, $m\,n$ ſcilicet parallelam Cuneo F K, atque $g\,n$ ipſi normalem, vis $g\,n$ aequaliter iterum diſtribuetur in iuncturas F, K, vel E, Q, et proinde a puncto E ducta E N $= g\,n$ perpendiculari rectae E Q, punctum E vrgebitur viribus E O, E N, vel, completo parallelogrammo E N P O, vi compoſita E P. Sunt vero anguli H B G, N E O inter ſe aequales, atque E O, E N aequantur itidem inter ſe, dum quantitate tantum, reſpectu ad ipſas, infiniteſima a ſe inuicem differunt. Ergo eo, quo ante, modo demonſtrabitur vim E P in ipſo eſſe propemodum radio circuli E L conſtitutam, atque minorem eſſe vi compoſita B I. Hinc conficitur primo, vires centrales B I, E P eſſe infinite paruas, eiusdem nempe ordinis ac B G, I G, et iuncturam E vi tangentiali finita E X $= r + \frac{d\,s.\,a\,v}{r}$, atque centrali infiniteſima E P eodem tempore ſollicitari, hoc eſt ex iisdem compoſita E R. Ducatur modo ex puncto X recta X V parallela lineae E Q, radio L E producto occurrens in V. Triangula X V E, L E B erunt ſimilia, ideoque X E : E L = V E : B E. Eſt autem E X maior quam E L. Ergo V E maior erit quam B E. Et eſt B I = B E maior quam E P; eo magis igitur V E maior erit quam E P. Quare compoſita vis E R cadet intra ſubtenſam E Q, atque tangentem circuli E X (§. 4.). Et exiſtente angulo X E Q infinitae paruitatis directio vis

E R

E R cum directione ſubtenſae E Q propemodum confundetur (§. 5.), eritque inſuper eadem vis compoſita E R, ob V E, E P infinite paruas, ipſi E X prorſus aequalis (§. 6.). Cum itaque vis E X tota transfundatur quantitate et directione in ſubtenſam E Q, transfundetur vtique in iuncturam Q, quantitate E X et directione E Q. At rurſus punctum Q trahitur eadem directione E Q vi ſiniſtrorſum elicita mn, quae, facta analogia,

$$gm : mn = ds : mn = S\iota : S.gLM = r : bz,$$

reperietur $= \frac{ds.bz}{r}$. Quapropter vrgebitur iunctura Q ſecundum E Q vi

$$QZ = EX + mn = r + \frac{ds.av}{r} + \frac{ds.bz}{r}.$$

Atque eodem, quo ante, modo demonſtrabitur, vim inſuper adeſſe infiniteſimam Q S, minorem autem quam E P, quae punctum Q ad centrum L ſollicitare debet, atque ex his binis Q Z, Q S compoſitam Q Y′ transfundi, identidem in cuneolum proximum Q Δ, quantitate eadem Q Z, atque directione tangentiali Q Δ, et ita porro. Erit igitur impulſio tangentialis in $B = r$; in E vel $F = r + \frac{ds.av}{r}$; in Q vel $K = r + \frac{ds.av}{r} + \frac{ds.bz}{r}$, et ita ſucceſſiue, lege iam per ſe manifeſta. Iungantur itaque puncta a, b, b, e, e, t, etc. rectis ab, be, et, etc. et quoniam, ob ſimilitudinem Triangulorum $ab\Phi$ aLv eſt

$$La : av = ab : a\Phi, \text{ vel } r : av = ds : a\Phi,$$

erit $\frac{ds.av}{r} = a\Phi$. Simili modo obſtendetur eſſe

$$\frac{ds.bz}{r} = b\mu, \quad \frac{ds.ey}{r} = ef,$$

et ita porro. Ergo rurſus erit vis tangentialis in $A = ar$, in $F = r + a\Phi$, in $K = r + a\Phi + b\mu = r + v\gamma$; in Y

 $= r$

$$= r + a\Phi + b\mu + ef = r + vl, \text{ etc.}$$

Cum autem ex arculis vel cuneolis huiusmodi infinities repetitis arcus prodeat finitus, ponatur Arcum M Y factum eſſe finitae magnitudinis. Certum quidem eſt arcui M Y absciſſam reſpondere $Mp = x$, finitae pariter magnitudinis, et fore quoque vp quantitatem finitam, vtpote quae ab $Mp = x$ differt quantitate Mv infiniteſima ordinis ſecundi, eidemque proinde Mp eſſe aequalem. Lineae autem vp, vl differunt magnitudine pl, reſpectu ad vp, infiniteſima. Ergo vp, vl, ſiue Mp, vl pro aequalibus itidem haberi poſſunt. Qua de re vis tangentialis in Y ($= r + vl$) aequabitur $r + x$. Quod cum in quolibet Arcus ſegmento, a puncto M computato, demonſtretur, patet, impulſionem tangentialem in quocunque ſemicirculi puncto aequari aggregato ſemidiametri, atque abſciſſae a vertice M eidem puncto reſpondentis. Q. E. I et D.

Corollarium 1.

§. 9. Quodcunque igitur ſemiperipheriae circularis R′ M S′ ſegmentum in Fornice extruendo arripiatur, puta Y M Δ, ducta Δ ω recta linea circulum tangente in Δ, factaque $\Delta\omega = ML + Mp$, erit Δ ω tum linea directionis, cum impulſionis quantitas abſoluta in Δ. Et quoniam in baſi Pilae puncto Δ ſuppoſitae conſtituitur fulcrum, circa quod, veluti centrum, motus quantitates aeſtimari debent, facile perſpicere eſt, momenta impulſionum definienda eſſe ex facto impulſionis abſolutae in rectam ad impulſionis directionem e fulcro, normaliter eductam.

Corol-

Corollarium 2.

§. 10. Quare ſi ab eodem baſeos fulcro ductae concipiantur perpendiculares Lineae ad quamlibet impulſionis tangentialis directionem, vt impulſuum momenta varia definiantur, id attendenti patet, ab vmbilico Puluinar verſus vires impellentes ſemper augeri: augeri vero e contra vectes impulſionum a Puluinari vmbilicum verſus. Quapropter punctum erit aliquod Arcus ſemicircularis ita conſtitutum, vt factum ex vi ibi impellente in diſtantiam a centro motus, vel momentum ſit omnium momentorum maximum. Itaque, quotiescunque Pilarum reſiſtentiae ſint definiendae in quauis tum Curuae Concamerationis, cum ponderum ſuperincumbentium hypotheſi, momenta impulſionum maxima in anteceſſum inueſtiganda ſunt, atque cum his tantummodo comparari, et aequilibrari debent virium in Pilis ſubiectis contranitentium momenta; quod ſemel animaduertiſſe ſufficiat.

Scholion.

§. 11. Si duae vires finitae in punctum aliquod agant, atque angulus, quem virium directiones conſtituunt, ſit infinite obtuſus, haud difficulter demonſtrari poteſt, vim ex his compoſitam fore magnitudinis infinite paruae ad vires comparate laterales ex quibus oritur. Nil itaque mirum ſi ex reſolutione vis infiniteſimae primi ordinis B I (Prop. 1.) vires progignantur laterales finitae B D, B C (Fig. 4.) angulum efficientes, directionibus B D, B C, infinite obtuſum C B D.

Propo-

Propoſitio 2.

§. 12. Maximum impulſionis momentum in Fornice ſemicirculari, in omni arcus puncto aequaliter gravato, definire.

Tab. IV. Fig. 5.

Recta BS tangat ſemicirculum GBMD in B, atque e fulcro F Pilae GF ducatur ad BS normalis recta FS, ordinataque ad diametrum Circuli DG recta BC, quae producta occurrat rectae SF productae in Q, agantur BA, FE diametro DG parallelae, ducaturque ſemidiameter PB. Eſto itaque radius circuli $= 1$

$$MA = x,\ AB = PC = y, \text{ erit}$$

$$AP = CB = 1 - x,\ CG = 1 - y = FE,$$

altitudo Pilae $GF = a$. Ob parallelas BP, QS anguli PBC, FQE inter ſe aequantur; vterque vero angulus PCB, FEQ rectus eſt. Ergo et reliqui EFQ, BPC erunt aequales. Quare Triangula PBC, FEQ ſunt ſimilia, ideoque $PC : CB = FE : EQ$, hoc eſt

$$y : 1 - x = 1 - y : EQ. \text{ Ergo } EQ = \frac{(1-y)(1-x)}{y},$$

eſt autem

$$PC : PB = FE : QF, \text{ vel } y : 1 = 1 - y : QF,$$

atque ideo $QF = \frac{1-y}{y}$. Erit itaque

$$BQ = 1 - x + a + \frac{(1-y)(1-x)}{y}.$$

Verum eſt $PB : BC = BQ : QS$, hoc eſt

$$1 : 1 - x = BQ : QS.$$

Ergo

$$QS = (1 - x)\left(1 - x + a + \frac{(1-y)(1-x)}{y}\right),$$

atque

FS =

$$FS = QS - QF = \frac{x^2 - axy + ay - 2x + y}{y}.$$

Definita eſt autem tangentialis impulſio in $B = 1 + x$ (§. 8.) Quare momentum generaliter expreſſum erit

$$\frac{(1 + x)(x^2 - axy + ay - 2x + y)}{y},$$

vel translato fulcro F in G, hoc eſt poſita $a = 0$, ſuffectoque valore y in x ex aequatione Circuli $y^2 = 2x - x^2$, erit impulſionis in x momentum generale

$$= (x^3 - x^2 - 2x)(2x - x^2)^{-\frac{1}{2}} + x + 1.$$

Differentietur Aequatio, vt prodeat aequatio finita, facta diuiſione per $x\,dx$, quae ſequitur

$$4x^6 - 24x^5 + 49x^4 - 34x^3 - 3x^2 + 4x + 4 = 0 \ldots\ldots (A).$$

Aequatio (A) in duas reſoluitur (B), (C)

$$x^3 - 5x^2 + 8x - 4 = 0 \ldots\ldots (B)$$
$$4x^3 - 4x^2 - 3x - 1 = 0 \ldots\ldots (C).$$

Harum prior (B) tribus radicibus eſt praedita realibus, rationalibusque, $x - 1 = 0$, $x - 2 = 0$, $x - 2 = 0$, quae ad puncta referri debent G, H. Cum autem ad rem noſtram faciat maximum, quod intra limites M, G continetur, Aequationem (C) euoluere neceſſe eſt. Fiat itaque in (C) $x = \frac{v}{108} + \frac{1}{3}$. Nanciſcimur Aequationem (D), quae duas habet radices imaginarias, tertiam vero realem poſitiuam intra limites 55, 56 conſtitutam

$$v^3 - 2025\,v - 57952 = 0 \ldots\ldots\ldots (D),$$

Ergo abſciſſa x Aequationis (C), cui punctum maximi reſpondet in Arcu MG, intra limites conſiſtet $\frac{273}{324}$ MP, atque $\frac{276}{324}$ MP. Q. E. I.

 Scho-

Scholion.

§. 13. Problematis de impulſione tangentiali definienda in Arcu ſemicirculari dedimus completam in hypotheſi ponderum aequalium ſuper quaelibet arcus puncta impoſitorum ſolutionem. Ne vero in peculiari caſu ſegnius, quam par eſt, immorari videamur, generalem ſolutionem in quauis ponderum hypotheſi aggrediamur. Id interim adnotare liceat, caſum quendam ponderum aequalium in fornice circulari tum locum habere, quod non raro in ciuili architectura Lunulis conſtruendis vſu venit, cum exiſtente A B C, ſegmento quolibet ſemiperipheriae circularis M B N, curua fornicis interna, fuerit curua exterior D E F idem circulus M B N per translationem Diametri M N in D F, motu ſibi parallelo, in D E F transpoſitus. Cum enim ſit E e = B b, demta communi recta B e, ſit E B = $e\,b$. Eodem modo ſit $a\,b = f\,i$, $c\,d = g\,k$, et ita porro. Omnes itaque E b, $a\,b$, $c\,d$, etc. ſunt inter ſe aequales, nempe quae vni eidemque aequantur quantitati. Si igitur ſubtenſae vel arculi B b, $b\,d$, etc. fuerint aequales, parallelogramma verticalia E B $b\,a$, $a\,b\,d\,c$, etc. pondera ſuper eosdem arcus impoſita exprimentia, erunt inter ſe aequalia. Sed generatim res ſuo loco euoluetur.

Tab. V. Fig. 6.

Propoſitio 3.

§. 14. Impulſiones arcuum circularium in quacunque ponderum ſuperincumbentium hypotheſi inueſtigare.

Tab. V Fig. 7 Eſto Fornix ſemicircularis K B G, atque pondus impoſitum ſuperficie M K B G R A M exprimi concipiatur, ita,

ita, vt arcus quilibet circuli infiniteſimus F f areola verticali ſibi impoſita grauetur H F f I, curua quacunque M A R terminata. Applicentur ad Axim A E normales F C, H L, ponaturque A B $= a$, A L $= z$, L H $=$ C F $= y$, B C $= x$. Erit H F $= a + x - z$, I $h = af = dy$, atque elementum vel ponduſculum H F f I $= (a + x - z)\,dy$. Verum reſoluta huiusmodi vi verticali Cuneoli infinite parui F f in duas, quarum altera cuneum ſollicitet directione ad ipſum normali, altera vero directione eidem parallela, actio, qua vrgetur iunctura f vel terminus cuneoli, ſecundum F f, inſtituta analogia

$$S\,t.:\text{coſ. arc. } FG = r : y = (a + x - z)\,dy,$$

ad quartum proportionale, definietur $(a + x - z)\,y\,dy : r$. Ergo ſumma finita harumce elementarium actionum erit $\frac{1}{r}\int(a + x - z)\,y\,dy$. Perſpectum eſt autem (§. 8.), impulſus tangentiales componi ſemper ex aggregato iſtiusmodi actionum ſummae, atque vis tangentialis prope verticem vel vmbilicum B. Quare ſi denotetur haec vis determinata quantitate K, erit impulſus in quouis puncto

$$F = K + \tfrac{1}{r}\int(a + x - z)\,y\,dy.$$

Quantitatis autem K valor elicietur tali pacto. Quoniam pondus abſolutum vmbilici A B (Fig. 4.), quod per ſubtenſam ſcilicet, ds exprimebatur in Prop. 1, fit modo $(a + x - z)\,dy$, erit verticalis actio B G in punctum B

$$= (a + x - z)\,\frac{dy}{2}.$$

Cumque eodem, quo ante, modo demonſtretur, fore B H $=$ B G, atque

$$BG + BH = BI = 2\,BG = (a + x - z)\,dy,$$

ſintque praeterea Triangula B I D, B L E ſimilia, et proinde

inde $BE : BL = BI : BD$, erit

$$ds : r = (a + x - z)\, dy : BD,$$

ideoque ratio $r : BD$ componetur ex rationibus $ds : dy$, atque $1 : a + x - z$. Ducatur itaque ex puncto E normalis ad diametrum ML, ſecans verticalem rectam BG in r; erit

$$BE = ds = \sqrt{((Br)^2 + (rE)^2)}.$$

Et eſt Br infiniteſima ordinis ſecundi, comparate ad rE, et proinde ſumi poteſt $ds = rE$. Ergo, exiſtente $ds : dy$ aequalitatis ratione, erit $r : BD = 1 : a + x - z$. Cum autem euadat tum HF (Fig. 7.) $= a + x - z$, infinite propinqua rectae AB, atque prae a euaneſcant quantitates x et z, $a + x - z$ idem fit ac a. Quare

$$BD = r(a + x - z) = ar = K,$$

et proinde impulſus tangentialis in quolibet circuli puncto erit

$$ar + \tfrac{1}{r} \int (a + x - z)\, y\, dy + \text{conſt.} \ldots\ldots\ldots (B)$$

Q. E. I.

Corollarium 1.

§. 25. Si igitur quaelibet circuli puncta eodem grauari pondere ſupponantur, erit ponduſculum abſolutum $(a + x - z)\, dy$ conſtans. Ponatur id $= ds$, arculo ſcilicet minimo, qui conſtans ſumtus eſt, et capta pro a vnitate, erit impulſus in quolibet puncto $= r + \int \frac{y\, ds}{r}$. Eſt autem in quolibet itidem puncto $r : y = ds : dx$. Ergo $y\, ds : r = dx$, atque ideo expreſſio impulſuum generalis integrata fit $r + x$, quemadmodum inuentum eſt in Prop. 1.

Corol-

Corollarium 2.

§. 16. Datis itaque Aequationibus Curuae M A R, atque circuli K B G, dabitur in primis valor z in y et conſtantes, quo in expreſſione integrali ſuffecto, atque ex Aequatione circuli alterutra variabili x vel y eliminata, vnica variabili conſtabit formula integranda. Manifeſtum hinc eſt nullis laborare difficultatibus Theoriam noſtram ad Praxin applicatam.

Corollarium 3.

§. 17. Cum autem prope vmbilicum tangentialis impulſio ſit ex demonſtratis $= a r$, facile videre eſt, conſtantem ita determinari debere, integratione peracta, vt facta x vel $y = 0$, prout alterutra ſumta fuerit in expresſione, quod remanet, ſit $a r$.

Exemplum.

Impulſus tangentiales in Arcu circulari B G (Fig. 7.), linea recta exterius terminato, definire. Ratio A E : E R ſit $= 1 : m$. Erit Aequatio Lineae exterioris $m z = y$. Ergo formula impulſionum pro circulo exhibita, euadet

$$a r + \frac{1}{r} \int \left(a + x - \frac{y}{m}\right) y \, d y + \mathrm{A}.$$

Cum vero Aequatio Fornicis ſit $y^2 = 2 r x - x^2$, erit differentiando $y \, d y = r \, d x - x \, d x$. Quare rurſus ſuffecto valore y, formula fiet huiusmodi

$$a r + \frac{1}{r} \int d x \left(a r + (r - a.) x - x^2 + \frac{x - r}{m} \sqrt{(2 r x - x^2)}\right) + \mathrm{A},$$

atque, completa integratione, huiusmodi

$$a r + a r x + \left(\frac{r - a}{2}\right) x^2 - \frac{x^3}{3} - \frac{1}{3 m} (2 r x - x^2) \sqrt{(2 r x - x^2)},$$

quae

quae expreſſio erit impulſuum tangentialium in quolibet circuli puncto abſciſſae x reſpondente.

Scholion.

§. 18. Id vſui eſſe poteſt Pontibus, atque concamerationibus extruendis in vniuerſa tum ciuili, cum militari Architectura.

Propoſitio IV.

§. 19. Impulſus tangentiales Fornicum quacunque interius curua Linea deſcriptorum, et in quauis ponderum ſuperincumbentium hypotheſi, definire.

Tab. V. Fig. 8. Eſto A B N interna quaelibet Fornicis Linea; B vmbilicus; N puluinar. Polygonum Curua A B N inſcribi infinitilaterum intelligatur, cuius ſupremum latusculum C E, vmbilicum referens, ſit horizonti parallelum: reliqua vero latera ſibi mutuo impoſita, et veluti cuneoli Fornicis habita (§. 1.) infinite parui, ſint E F, F G, G X, etc. Superficies X B Z Y, Curua Fornicis interna B X atque externa Z Y, cuiusuis naturae, contenta, pondus exprimat totale Fornici impoſitum. Manifeſtum quidem eſt, areolas E V S F, F S t G, G t v X, etc., fore neceſſario ponderis partes ſingulis arcubus elementaribus, vel minimis cuneolis verticaliter ſuperincumbentes. Ducantur itaque ad curuam A B N perpendiculares lineae C H, E H I, F I K, etc. curuae euolutam contingentes in H, I, K, etc. atque eiusmodi interuallis, veluti radiis, circuli curuam oſculantes deſcribantur centris H, I, K, etc. Et quoniam minimi arcus Curuae C E, E F, F G, etc. cum arcubus

cubus iſtiusmodi circulorum C E, E F, F G, etc. propemodum confundi cenſentur, cuneoli Fornicis minimi, quos diximus, arcubus hisce circularibus, absque erroris periculo, referentur. Hisce poſitis, ſi cuiuscunque ponduſculi vim abſolutam in puncto occurſus L lineae directionis cum ſubiecto cuneolo F G colligi concipiatur, ductis verticali L h, eandem vim abſolutam exprimente, atque $h\,g$ ad radium osculi L I normali, vel cuneo F G parallela, facile videre eſt fore

$$L\,h : h\,g = L\,I : I\,n = L\,p : p\,q = L\,p : L\,f,$$

hoc eſt in genere, vt normalis ad curuam in L eſt ad ordinatam puncto L reſpondentem. Quare exiſtente cuiuscunque normalis expreſſione generali $\frac{y\,\sqrt{(d\,x^2 + d\,y^2)}}{d\,x}$, erit vis abſoluta in quolibet cuneolo infinite paruo ad vim ſecundum cunei directionem, vt

$$\frac{y\,\sqrt{(d\,x^2 + d\,y^2)}}{d\,x} : y = \sqrt{(d\,x^2 + d\,y^2)} : d\,x.$$

Cum autem vis cunei abſoluta Spatiolo F S t G, vel facto aequetur F S × $t\,x$, poſito

$$Z\,B = a,\ Z\,\mu = z,\ B\,a = x,\ F\,a = y,\ \text{erit}$$
$$t\,x = d\,y,\ F\,S = a + x - z,\ \text{ideoque}$$
$$F\,S.\,t\,x = (a + x - z)\,d\,y.$$

Quare

$$\sqrt{(d\,x^2 + d\,y^2)} : d\,x = (a + x - z)\,d\,y : \text{vim } F\,G,$$

quae propterea erit

$$\frac{(a + x - z)\,d\,x\,d\,y}{\sqrt{(d\,x^2 + d\,y^2)}}.$$

Definita itaque pro quolibet cuneolo in genere vi impellente in ipſa cunei directione, ſimili, quo ante, modo demonſtrabitur, vnamquamque impulſionem tangentialem compo-

componi ex aggregato vis cuiusdam principalis K prope vmbilicum eliciendae, atque ſummae huiusmodi actionum $\frac{(a+x-z)\,dx\,dy}{\sqrt{(dx^2+dy^2)}}$ ſucceſſiue colligendarum, hoc eſt aequari in quantitatibus finitis

$$K+\int\frac{(a+x-z)\,dx\,dy}{\sqrt{(dx^2+dy^2)}}.$$

Ad determinandam itaque vim K, producatur verticalis linea V E in *d*, quae ideo ad ſubtenſam C E erit perpendicularis, tum ſegmentum E *d* dimidio aequetur ponderi abſoluto eidem ſubtenſae C E impoſito, ſcilicet $\frac{(a+x-z)\,dy}{2}$. Et quoniam pondus cunei infiniteſimi E F collectum intelligi poteſt in puncto occurſus lineae directionis e centro grauitatis ponduſculi V E F S eductae, arcusque vel ſubtenſae E F, vis abſoluta id punctum verticaliter ſollicitans in duas de more reſoluetur, normalem alteram ad E F, alteram eidem E F parallelam. Ducta proinde ad E F perpendiculari recta E *c*, quae actionem in iuncturam E repraeſentet, facile oſtendi poteſt tum vires E *d*, E *c* quantitate, ad ſe comparate, infiniteſima inter ſe differre, tum vim ex iisdem compoſitam E *e* in oſculatore radio E H propemodum conſtitutam cenſeri poſſe. Quare exiſtente angulo E *d e* infinite obtuſo, reliquisque angulis Trianguli E *e d* infiniteſimis vnius eiusdemque ordinis, erit aggregatum ex E *d* + *d e* = E *e*, veluti in Circulo confecimus (Prop. 1.),

$$= 2\,E\,d = (a+x-z)\,dy.$$

Praeterea ducta *e* O parallela ſubtenſae E C, quae cuneo E F producto occurrat in O, productaque F E in *i*, erit angulus E O *e* aequalis angulo infiniteſimo *i* E C. Cum autem radii E I, E H arcuum circularium contiguorum

E F

EF, EC, quantitate HI inter ſe differant infinite parua, poterunt EF, EC veluti arcus haberi vnius eiusdemque circuli, et cum proinde anguli CEI, FEI, EFI fiant aequales, erit angulus iEC vel EOe aequalis angulo EIF, ideoque latera Triangulorum EOe, EFI circa communem angulum OEI erunt proportionalia. Quapropter EF : EI = Ee : EO, hoc eſt

$$\sqrt{(dx^2 + dy^2)} : EI = (a + x - z)\,dy : EO.$$

Eſt autem $\sqrt{(dx^2 + dy^2)}$ idem ac dy, et proinde, vt $1 : a + x - z = EI : EO$. Differt autem EI ab EH=BH quantitate, ad ſe comparate, infiniteſima HI; et praeterea prope verticem, euaneſcentibus quoque prae a quantitatibus x atque z, fit $a + x - z$ idem ac a. Ergo $1 : a = BH : EO$. Dicatur itaque radius oſculi BH in vertice curuae R′: erit manifeſto vis principalis $EO = K = a\,R'$. Quare generatim Impulſio tangentialis in quolibet curuae puncto erit

$$a\,R' + \int \frac{(a + x - z)\,dx\,dy}{\sqrt{(dx^2 + dy^2)}} + \text{conſt} \;\ldots\ldots\; (M)$$

Q. E. I. et D.

Corollarium.

§. 20. Manifeſtum eſt, me haud monente, integrale ita ſumi debere, vt in vertice B ſola vis ſuperſit $a\,R'$, quo quidem determinabitur conſtans quam facillime, vt ante dictum eſt (§. 17.)

Scholion.

Formula integralis (M), termino $a\,R'$ veluti quantitate habito inuariabili, tres inuoluit variabiles x, z, y,

 quibus

quibus Problemata omnia reſoluuntur, quae circa impulſiones curuarum Fornicibus extruendis determinandas proponi poſſunt. Hinc Curuas minimae vel maximae impulſionis definiri, formas varias ad venuſtatem et firmitatem ſimul comparandas, combinari, perſpicuum eſt, quin vel curuarum natura, vel ponderum ſuperincumbentium lex quidpiam negotii faceſſere queat. Cum enim, data pro lubitu Curua concamerationis propria, detur eo ipſo variabilium x, y relatio, atque ponderum lex, vel ex indole et forma molis extruendae, vel ex lubitu itidem pendere ponatur, dabitur quoque variabilium z et y relatio, quo expreſſio integralis euoluenda vnius variabilis functio euadet, neque minimorum, maximorumue definitio communes calculi infiniteſimalis operationes praetergredietur. Quod quanti commodi in re praeſertim ad praxim aptanda futurum ſit, per ſe eſt manifeſtum.

Exemplum 1.

Tab. V. Fig. 9. Concamerationis ex binis ſemicirculis parallelis extructae impulſiones definire.

Eſto radius interni circuli $EB = b$ (fig. 9.), externi $FB = c$. Relationis aequatio inter x et y, abſciſſis a vertice E computatis, erit huiusmodi (A) $y = 2bx - x^2$. Relatio vero inter z atque y, abſciſſis itidem a puncto F computandis, aequatione exprimetur (B) $y = 2cz - z^2$. Et quoniam $FE = a = c - b$, atque radius oſculi in vertice E ipſe eſt radius circuli b, erit $aR' = (c - b)b$. Subſtituantur itaque loco z, atque y, eiusque differentialium in integrali (M) (§. 19.) valores in x ex Aequationibus (A) (B) eruendi; formula euadet

$(c-b)$

$$(c-b)b+\tfrac{1}{b}\int dx\,(2bx-x^2-b^2-(b-x)\sqrt{(x^2-2bx+c^2)}),$$

vel, integratione actu peracta, et rectificata conſtantis additione $-\frac{c^3}{3b}$, huiusmodi:

$$(c-b)b+x^2-\frac{x^3}{3b^2}-bx-\frac{c^3}{3b}+\left(\frac{x^2-2bx+c^2}{3b}\right)\sqrt{(x^2-2bx+c^2)}$$

quae impulſionem quaeſitam exprimat in quolibet interni circuli puncto, quemadmodum proponebatur.

Exemplum 2.

Quod ſi exterius recta linea inclinata terminari Fornicem, intelligatur, facile impulſiones in diuerſis curvis definientur tali pacto.

Eſto $bz = cy$ coordinatarum z et y relatio. Si in expreſſione (M) ſubſtituatur valor z in y, hanc nanciſcimur formulam:

$$aR' + \tfrac{1}{b}\int\frac{(ab+bx-cy)\,dx\,dy}{\sqrt{(dx^2+dy^2)}},$$

quae impulſiones refert in quolibet puncto a natura pendentes curuae internae proponendae.

Sit itaque Curua interior Parabola Apollonii, parametri $= m$, ad quam ſcilicet eſt $mx = y^2$. Suffecto valore ipſius y eiusque differentialium in x, erit impulſuum expreſſio haec:

$$aR' + \tfrac{1}{b}\int\frac{dx\,(abm+bmx-cm\sqrt{(mx)})}{\sqrt{(4mx+m^2)}}.$$

Cum vero radius oſculi R' in vertice Parabolae aequetur $\frac{m}{2}$, dimidio ſcilicet parametro, erit impulſuum expreſſio euoluta et rectificata pro Fornice Parabolico, quae ſequitur.

$$m^3\left(\frac{c}{64\,b}+\frac{1}{12}-\frac{c\,l.\,m}{8\,b}\right)-\frac{a\,m}{2}+\left(\frac{a}{2}-\frac{m}{8}\right)\sqrt{(4\,m\,x+m^2)}+\frac{(4\,m\,x+m^2)^{3:2}}{n\,4\,m}$$
$$+\frac{c\,m^4}{64\,b(\sqrt{(4\,m\,x+m^2)}-2\sqrt{(m\,x)})^2}-\frac{c}{32\,b}(\sqrt{(4\,m\,x+m^2)}-2\sqrt{(m\,x)})^2$$
$$+\frac{c\,m^2}{8\,b}\,l.\,(\sqrt{(4\,m\,x+m^2)}-2\sqrt{(m\,x)}).$$

Sit modo Curua interna Ellipſis, ſitque $AB=m$, $BE=n$ (fig. 9.) erit $\frac{m^2\,y^2}{n^2}=2\,m\,x-x^2$, abſciſſis x a puncto E computatis, coordinatarum orthogonalium relatio. Suffecto valore y, eiusque differentialium in x, et facto $2\,p$ parametro Axis coniugati, erit expreſſio impulſuum in quolibet ellipſeos puncto huiusmodi

$$ap+\frac{1}{b}\int\frac{dx(abnm+(bnm-abn)x-bnx^2-cn\sqrt{(2mx-x^2)}+\frac{cn^2x}{m}\sqrt{(2mx-x^2)})}{\sqrt{(m^2\,n^2+(2\,m^3-2\,m\,n^2)\,x+(n^2-m^2)\,x^2)}}$$

quae, conceſſa ellipſis rectificatione, integrabitur quam facillime. Et ita porro.

Propoſitio 5.

Impulſiones tangentiales in quolibet Catenariae vulgaris puncto definire, exiſtente termino Fornicis exteriori recta linea ordinatis parallela.

Quoniam Aequatio ad Catenariam eſt

$$dy=\frac{a\,d\,x}{\sqrt{(2\,a\,x+x^2)}},$$

quemadmodum inuenit *Ioannes Bernoulli* (vid. Op. Bern. Vol. III.), abſciſſis a vertice Curuae computatis, atque
Tab. V. Fig. 10. exiſtente a conſtanti quauis AB, ponantur loco dy, dy^2 valores $\frac{a\,d\,x}{\sqrt{(2\,a\,x+x^2)}}$, $\frac{a^2\,d\,x^2}{2\,a\,x+x^2}$ in expreſſione (M) (§. 19.) eritque impulſuum expreſſio generalis huiuſce formae:

$$a\,R^l+\int\frac{a\,d\,x\,(a+x-z)}{a+x}.$$

Quare

Quare poſita $z = 0$, fiet eiusmodi expreſſio integrata

$$a R' + a x.$$

Eſt autem radius oſculi in genere

$$(d x^2 + d y^2) \sqrt{(d x^2 + d y^2)} : - d x \, d d y.$$

Ergo Aequationem Catenariae differentiando, poſita $d x$ conſtanti, erit

$$d d y = (- a^2 - a x) d x^2 : (2 a x + x^2) \sqrt{(2 a x + x^2)},$$

ideoque radius oſculi $\frac{(a + x)^2}{a}$. Facta itaque $x = 0$, erit oſculi radius R' in vertice $A = a$. Ergo impulſus tangentiales in Catenaria aequabuntur $a^2 + a x$. Q. E. I.

Corollarium.

§. 23. Hinc impulſiones Fornicum ex Circulo, atque Catenaria, communi vertice A et amplitudine extructorum, eadem poſita ponderum ſuperincumbentium lege, inter ſe comparari poterunt. Definiatur itaque in primis circuli radius, qui per puncta Catenariae tranſeat A, D, C. Vertice A, et parametro $8 \, A B = 8 a$ deſcribatur Parabola Conica A L, et producatur ordinata C D, vt Parabolae occurrat in L. Ea eſt Catenariae proprietas, vt dimidius Arcus Parabolae A L aequetur ſemiordinatae K D. Quare arcus $A L = K D$ in x et conſtantes definiendus eſt, qui, methodo rectificationum tritiſſima, inuenietur huius formae:

$$\frac{2 a^3}{(\sqrt{(2 a x + 4 a^2)} - \sqrt{(2 a x)})^2} + 2 a \, l. \left(\frac{2 a}{\sqrt{(2 a x + 4 a^2)} - \sqrt{(2 a x)}}\right)$$
$$- \frac{(\sqrt{(2 a x + 4 a^2)} - \sqrt{(2 a x)})^2}{8 a}.$$

Ponatur is $= P$, erit $K D = \frac{P}{2}$. Sit inſuper ſagitta Fornicis $A K = b$, P' id, in quod vertitur $\frac{P}{2}$, ſubſtituto b loco

loco x, erit radius circuli per puncta A, D, C tranſiens $\frac{P'^2 + b^2}{2b} = r$. Hiſce poſitis, ſubſtituatur in expreſſione generali pro circulo inuenta

$$ar + \tfrac{1}{r}\int (a + x - z)\, y\, dy$$

valor $y\, dy = r\, dx - x\, dx$, ex aequatione circuli radio r deſcribendi depromtus, et fiat $z = 0$. Erit impulſio in quolibet circuli puncto

$$= ar + \tfrac{1}{r}\int (a + x)(r - x)\, dx + \text{conſt.}$$
$$= ar + ax + \left(\frac{r - a}{2r}\right) x^2 - \frac{x^3}{r}.$$

Et eſt $a^2 + ax$ impulſuum generalis expreſſio in quolibet Catenariae A H C puncto, quemadmodum §. 22. definitum eſt. Prout igitur fuerit

$$x^3 - \left(\frac{r - a}{2r}\right) x^2 - ar + a^2$$

nihilo minus vel maius, erunt impulſiones tangentiales in arcu circulari maiores vel minores quam in Catenaria, in punctis nempe eidem abſciſſae x reſpondentibus. Quare, vt euolutio facile fieri poſſit, ponatur, quod licet,

$$BA = AK = a = b = 1. \text{ Erit}$$
$$P' = \frac{2\sqrt{3} - 3}{4 - 4\sqrt{3}} + l.\, \frac{2}{\sqrt{6} - \sqrt{2}}, \text{ ideoque}$$
$$r = \frac{P'^2 + b^2}{2b} = \frac{P'^2 + 1}{2}.$$

Cumque x maius quam b eſſe non poſſit, atque inueniatur facile r maius binario, inito calculo, reperietur fore expreſſionem

$$x^3 - \left(\frac{r - 1}{2r}\right) x^2 + 1 - r$$

ab $x = 0$ ad $x = 1$ perpetuo negatiuam, nihilo ſcilicet minorem. Ergo impulſiones tangentiales maiores erunt in Arcu Circulari A H′ C quam in Catenaria A H C, communi

muni poſito vmbilico A, eademque ſumta amplitudine Fornicis D C. Ne vero in ſingulari tantum comparatione conſiſtamus, nihil lineis Catenariis praeſtantius, fornicibus extruendis, dari, in ſequentibus coronidis loco demonſtrabimus.

Propoſitio 6.

§. 24. Curuam concamerationibus conſtruendis minimae impulſionis in quacunque ponderum impoſitorum hypotheſi inuenire.

Eſto Fornicis amplitudo $DC = 2p$, altitudo $AK = q$, BF linea quaelibet fornicem ambiens exterius, cuius altitudo vmbilico ſuperincumbens $AB = a$. Ex infinitis curvis lineis, quae per puncta A, D, C duci poſſunt, eam definire oportet, quae in puncto perimetri eidem abſciſſae $AG = x$ reſpondente, omnium minimo polleat impulſu tangentiali, eadem quauis manente ſcala ponderum B F. Quoniam itaque impulſus tangentiales in genere forma oecumenica

$$a R' + \int \frac{(a + x - z)\, dy\, dx}{\sqrt{(dx^2 + dy^2)}} \; \ldots\ldots \; (A)$$

comprehenduntur, et pro diuerſis curuis forma (A) diuerſos induat valores, etiamſi in omnibus eadem capiatur abſciſſa, eademque ſit linea B F, manifeſtum eſt, inter infinitas Curuas vnam quandam eſſe debere, in qua valor formulae (A) fiat minimus. Atque haec quidem erit Curua minimae impulſionis tangentialis quaeſita. Cum autem aR', facilitatis gratia, veluti quantitas abſoluta haberi poſſit, vt in minimi inquiſitionem non cadat, formulam

lam (A) fieri minimum ponatur, ſi

$$\int \frac{(a + x - z)\, d y\, d x}{\sqrt{(d x^2 + d y^2)}} = \int (Z\, d x)$$

fuerit minimum. Quare ſit Y functio ipſius y, $d\mathrm{Y} = \mathrm{Y}' dy$, ex aequatione lineae B F eruenda, atque ſubſtituenda loco z in formula integrali, et poſito $d y = p\, d x$, transformabitur illa in hanc:

$$\int (Z\, d x) = \int \frac{(a + x - Y)\, p\, d x}{\sqrt{(1 + p^2)}}.$$

Erit itaque

$$Z = \frac{a p + p x - p Y}{\sqrt{(1 + p^2}} \text{ atque } d Z = \frac{d p\, (a + x - Y)}{(1 + p^2) \sqrt{(1 + p^2)}}$$
$$+ \frac{d x\, (p + p^2 Y' + p^3 + p^4 Y')}{(1 + p^2) \sqrt{(1 + p^2)}} = M\, d x + N\, d y + P\, d p,$$

iuxta *Variationum* methodum. Quare

$$M = \frac{p + p^2 Y' + p^3 + p^4 Y'}{(1 + p^2) \sqrt{(1 + p^2)}},\ N = 0,\ P = \frac{a + x - Y}{(1 + p^2) \sqrt{(1 + p^2)}}.$$

Cumque Aequatio lineae quaeſitae determinari debeat ex aequatione $N - \frac{d P}{d x} = 0$, erit manifeſto $d P = 0$, ideoque

$$P = \frac{a + x - Y}{(1 + p^2) \sqrt{(1 + p^2)}} = \text{conſt. } A.$$

Quapropter

$$a + x - Y = A\, (1 + p^2) \sqrt{(1 + p^2)},$$
$$(a + x - Y)^2 = A^2\, (1 + p^2)^3,$$
$$(a + x - Y)^{2:3} = A^{2:3}\, (1 + p^2),$$
$$(a + x - Y)^{2:3} - A^{2:3} = A^{2:3} p^2,$$
$$\frac{(a + x - X)^{2:3} - A^{2:3}}{A^{2:3}} = p^2 = \frac{d y^2}{d x^2}. \text{ Ergo}$$
$$d y = d x \sqrt{\left(\frac{(a + x - Y)^{2:3} - A^{2:3}}{A^{2:3}}\right)}$$
$$= \frac{d x}{A^{1:3}} \sqrt{((a + x - Y)^{2:3} - A^{2:3})},$$

$p =$

et integrando

$$y = \frac{1}{A^{1:3}} \int (dx \sqrt{((a+x-Y)^{2:3} - A^{2:3})}) + \text{conſt.} B$$

quae Aequationem oecumenicam praebet ad lineam quaeſitam. Q. E. I.

Corollarium 1.

§. 25. Conſtantes arbitrariae A et B ex binis Problematis conditionibus determinari debent, quod nempe facta $x = 0$, ſit $y = 0$, et facta $x = q$, ſit $y = p$.

Corollarium 2.

§. 26. Vt hypotheſis ponderum linea BF, recta ordinatis parallela, terminatorum, locum habeat, ponatur in Aequatione

$$dy = \frac{dx}{A^{1:3}} \sqrt{((a + x - Y)^{2:3} - A^{2:3})},$$

$$Y = z = 0, \text{ et fiat } a + x = t^{3:2}, A = b^3.$$

Aequatio hanc induit formam

$$dy = \frac{3\,dt}{2\,b} \sqrt{(t^2 - b^2 t)}.$$

Rurſus vero, poſita $t - \frac{b^2}{2} = u$, permutatisque co-ordinatis, prodibit

$$du = \frac{3\,dy}{2\,b} \sqrt{(y^2 - \frac{b^4}{4})},$$

quae eſt ad Curuam Catenae ponderibus inaequaliter gravatae, pro qua dedit dudum *Bernoulli Ioannes* huiusmodi Aequationem (pag. 498. loco cit.)

$$dx = \frac{dy}{2a} \sqrt{(y^2 - 4a^2)}.$$

 Quod

Quod memorabile prorſus videtur, atque in eam ſententiam facile trahit, Curuam minimae impulſionis in quacunque ponderum hypotheſi, Catenariam quandam futuram ex Catena vel fune flexili genitam, cuius elementa ponderibus data lege progredientibus grauentur. Ne quid tamen deſit, firma id demonſtratione comprobabimus tali pacto.

Propoſitio VII.

§. 27. Curua Fornicibus extruendis proprietate minimae impulſionis gaudens in quauis Ponderum ſuperimpoſitorum ſuppoſitione, eſt vna ex Catenariis vel Lineis a fune flexili inaequaliter grauato deſignatis.

Si pondus Catenae integrum a ſuſpenſionis vtrolibet puncto ad infimum dicatur in genere P, demonſtratum eſt a *Bernoullio* (ibidem), fore perpetuo $dx : dy = P : \text{conſt.}\, b$.

Hoc poſito, ſi ponduſcula, quibus elementa Catenae grauari concipiuntur, fuerint vt elementa cuiusdam ſpatii $y\,dx$, manifeſtum eſt, fore pondus integrae catenae $= \int(y\,dx)$. Intelligatur huiusmodi ſcala ponderum ita comparata, vt ſit

$$\int(y\,dx) = \sqrt{(a + y - X)^{2:3} - b^2} = P,$$

exiſtente X functione tantum variabilis x. Erit

$$dx : dy = \sqrt{((a + y - X)^{2:3} - b^2)} : b,$$

hoc eſt

$$dx = \frac{dy}{b} \sqrt{((a + y - X)^{2:3} - b^2)} \ldots\ldots (M).$$

Iam vero Aequatio nobis inuenta (§. 24.)

$dy =$

$$d y = \frac{d x}{A^{1:3}} \sqrt{((a + x - Y)^{2:3} - A^{2:3})},$$

ad Curuae conuexitatem reducatur, ponendo y loco x, atque x loco y, $A = b^3$, vt ante, quo Y, functio ipſius y, transformetur in X, functionem x, eritque

$$d x = \frac{dy}{b} \sqrt{((a + y - X)^{2:3} - b^2)}.$$

Quae cum eadem ſit Aequatio ad Catenariam (M), patet propoſitum. Q. E. D.

Scholion.

§. 28. Conſtructiones Linearum praetermittimus, vtpote quae in vſum verti nequeunt, conſultius fore exiſtimantes, ſi Formulae actu in ſeries conuertantur ſatis conuergentes, vt terminos aliquot pro ſerie ipſa vſurpare liceat. Quo poſito, haud difficulter conſtantes binae determinari poterunt, et Lineae propoſitae ad Curuarum Familiam generis Parabolici $y = A + B x + C x^2 +$ etc. redigentur, quo Linearum per puncta deſcriptiones vero proximae haberi poterunt, conſtructionesque vitari, vix ac ne vix quidem ad Praxin accommodandae.

DE

FIGVRA CVRVAE ELASTICAE CONTRA OBIECTIONES QVASDAM ILL. D'ALEMBERT.

Auctore
L. EVLERO.

§. 1.

Tab. I. Fig. 7. Conſideretur virga elaſtica, in termino B muro firmiter infixa, cui in altero termino A appenſum ſit pondus Q, quo virgae inducatur figura incuruata B M A, quam ergo vtrum ex principio a *Iacobo Bernoulli* ſtabilito determinare liceat nec ne, videamus; ſiquidem *Ill. d'Alembert* in Tomo nouiſſimo Opuſculorum contendit, hoc principium neutiquam ſufficere, et curuam manere indeterminatam.

§. 2. Ponamus igitur totam virgae longitudinem B M A $= a$, et pro quouis puncto indefinito M vocetur arcus B M $= s$, abſciſſa B P $= x$, applicata P M $= y$ et inclinatio tangentis ad Horizontem V T M $= \phi$. Praeterea ponatur pro altero termino A, abſciſſa B F $= f$, applicata F A $= g$ et inclinatio extremae tangentis $= \zeta$, quibus poſitis erit $d x = d s$ coſ. ϕ et $d y = d s$ ſin. ϕ.

§. 3.

§. 3. Iam momentum ponderis Q reſpectu puncti M eſt Q. P F $= Q(f-x)$, quod ſuſtineri debet ab elaſticitate virgae in M, quae ſi vocetur $= E$, quia reciproce proportionalis eſt radio oſculi $\frac{ds}{d\Phi}$, ſtatim habebimus

$$Q(f-x) = E\frac{d\Phi}{ds}, \text{ vnde fit } \frac{d\Phi}{ds} = \frac{Q}{E}(f-x).$$

§. 4. Ponatur $\frac{d\Phi}{ds} = \frac{f-x}{bb}$, vbi bb eſt quantitas ex ſtatu quaeſtionis data; at quantitates f, g, ζ, ex inuenta demum Curua definiri poterunt. Hanc autem aequationem differentiando, poſito ds conſtante, colligitur

$$\frac{dd\Phi}{ds} = -\frac{dx}{bb} = -\frac{ds\,\text{coſ.}\,\Phi}{bb}, \text{ vnde fit}$$

$$bb\,dd\Phi = -ds^2\,\text{coſ.}\,\Phi.$$

Multiplicetur haec aequatio per $2d\Phi$ et integrando prodibit iſta:

$$bb\,d\Phi^2 = -2ds^2\,\text{ſin.}\,\Phi + C\,ds^2, \text{ vnde fit}$$

$ds^2 = \frac{bb\,d\Phi^2}{C - 2\,\text{ſin.}\,\Phi}$, et poſito $C = 2\alpha$ integrando fiet

$$s = \frac{b}{\sqrt{2}}\int\frac{d\Phi}{\sqrt{(\alpha - \text{ſin.}\,\Phi)}}.$$

Tum vero, ob

$$f-x = \frac{bb\,d\Phi}{ds}, \text{ erit } f-x = b\sqrt{2(\alpha - \text{ſin.}\,\Phi)}.$$

§. 5. Hic primo patet, ſumto $x = 0$ fieri debere $\Phi = 0$, quandoquidem tangens Curuae in B neceſſario manet horizontalis, ad quam conditionem *Ill. d'Alembert* non attendiſſe videtur: at hinc ſtatim ſequitur $f = b\sqrt{2\alpha}$. Deinde, poſito $x = f$, fit $\Phi = \zeta$ et $\alpha = \text{ſin.}\,\zeta$ et $f = b\sqrt{2\,\text{ſin.}\,\zeta}$, hincque $x = b\sqrt{2\,\text{ſin.}\,\zeta} - b\sqrt{2(\alpha - \text{ſin.}\,\zeta)}$ atque

$$s = \frac{b}{\sqrt{2}}\int\frac{d\Phi}{\sqrt{(\text{ſin.}\,\zeta - \text{ſin.}\,\Phi)}},$$

quod integrale, a termino $\Phi = 0$ vsque ad $\Phi = \zeta$ extenſum,

ſum, dabit totam virgam $s = a$, ita vt

$$a = \frac{b}{\sqrt{2}} \int \frac{d\Phi}{\sqrt{(\text{ſin.}\,\zeta - \text{ſin.}\,\Phi)}} \left(\begin{smallmatrix} a\ \Phi = 0 \\ ad\ \Phi = \zeta \end{smallmatrix}\right),$$

ex qua aequatione angulum ζ definitum iri, patet; ſicque omnia per binas quantitates datas a et b determinantur, cum ſit

$$x = b\sqrt{2}\,(\sqrt{\text{ſin.}\,\zeta} - \sqrt{(\text{ſin.}\,\zeta - \text{ſin.}\,\Phi)}) \text{ et}$$

$$y = \frac{b}{\sqrt{2}} \int \frac{d\Phi\ \text{ſin.}\,\Phi}{\sqrt{(\text{ſin.}\,\zeta - \text{ſin.}\,\Phi)}}.$$

§. 6. Cum igitur peruenerimus ad hanc aequationem

$$\frac{a\sqrt{2}}{b} = \int \frac{d\Phi}{\sqrt{(\text{ſin.}\,\zeta - \text{ſin.}\,\Phi)}} \left(\begin{smallmatrix} a\ \Phi = 0 \\ ad\ \Phi = \zeta \end{smallmatrix}\right),$$

videamus quomodo hoc integrale per ſeriem commodiſſime exprimi queat. Hunc in finem ponamus ſin. $\zeta = \alpha$ et ſin. $\Phi = z$, atque ob $d\Phi = \frac{dz}{\sqrt{(1 - zz)}}$ erit

$$\frac{a\sqrt{2}}{b} = \int \frac{dz}{\sqrt{(\alpha - z)}\sqrt{(1 - zz)}} \int \frac{dz}{\sqrt{(\alpha - z)}} (1 + \tfrac{1}{2} zz + \tfrac{1.3}{2.4} z^4 + \text{etc.})$$

Ponatur

$$\int \frac{z^n\,dz}{\sqrt{(\alpha - z)}} = A z^n \sqrt{(\alpha - z)} + B \int \frac{z^{n-1}\,dz}{\sqrt{(\alpha - z)}}$$

et differentiando fiet

$$z^n = n A \alpha z^{n-1} - (n + \tfrac{1}{2}) A z^n + B z^{n-1},$$

vnde colligitur

$$A = \frac{-2}{2n+1} \text{ et } B = \frac{2n\alpha}{2n+1}.$$

Pro terminis autem $z = 0$ et $z = \alpha$ membrum abſolutum euaneſcit, vnde oritur iſta reductio generalis:

$$\int \frac{z^n\,dz}{\sqrt{(\alpha - z)}} = \frac{2n\alpha}{2n+1} \int \frac{z^{n-1}\,dz}{\sqrt{(\alpha - z)}}.$$

§. 7.

§. 7. Quod ſi iam loco n ſucceſſiue ſcribamus numeros 1, 2, 3, 4, etc. habebimus valores ſequentes:

$$\int\frac{dz}{\sqrt{(\alpha-z)}}=2\sqrt{\alpha};\qquad \int\frac{z\,dz}{\sqrt{(\alpha-z)}}=\tfrac{2}{3}\,2\,\alpha\sqrt{\alpha}$$

$$\int\frac{zz\,dz}{\sqrt{(\alpha-z)}}=\frac{2.\,4}{3.\,5}.\,2\,\alpha\alpha\sqrt{\alpha};\qquad \int\frac{z^3\,dz}{\sqrt{(\alpha-z)}}=\frac{2.\,4.\,6}{3.\,5.\,7}.\,2\,\alpha^3\sqrt{\alpha}$$

$$\int\frac{z^4\,dz}{\sqrt{(\alpha-z)}}=\frac{2.\,4.\,6.\,8}{3.\,5.\,7.\,9}.\,2\,\alpha^4\sqrt{\alpha};\quad \int\frac{z^5\,dz}{\sqrt{(\alpha-z)}}=\frac{2.\,4.\,6.\,8.\,10}{3.\,5.\,7.\,9.\,11}\,2\,\alpha^5\sqrt{\alpha}$$

$$\int\frac{z^6\,dz}{\sqrt{(\alpha-z)}}=\frac{2.\,4.\,6.\,8.\,11.\,12}{3.\,5.\,7.\,9.\,11.\,13}.\,2\,\alpha^6\sqrt{\alpha};\ \text{etc.}$$

quibus rite ſubſtitutis colligitur:

$$\frac{a\sqrt{2}}{b}=2\sqrt{\alpha}\left(1+\tfrac{1}{2}.\,\tfrac{2.\,4}{3.\,5}\,\alpha^2+\tfrac{1.\,3}{2.\,4}.\,\tfrac{2.\,4.\,6.\,8}{3.\,5.\,7.\,9}\,\alpha^4+\text{etc.}\right)$$

quae expreſſio facile ad hanc concinniorem reducitur:

$$\frac{a}{b\sqrt{2}}=\sqrt{\alpha}\left(1+\tfrac{2.\,2}{3.\,5}\alpha^2+\tfrac{2.\,2.\,6.\,6}{3.\,5.\,7.\,9}\alpha^4+\tfrac{2.\,2.\,6.\,6.\,10.\,10}{3.\,5.\,7.\,9.\,11.\,13}\,\alpha^6+\text{etc.}\right)$$

ſiue

$$a=f\left(1+\tfrac{2.\,2}{3.\,5}\,\alpha^2+\tfrac{2.\,2.\,6.\,6}{3.\,5.\,7.\,9}\,\alpha^4+\text{etc.}\right),\ \text{ob}\ f=b\sqrt{2\alpha}.$$

§. 8. Cum porro ſit

$$y=\frac{b}{\sqrt{2}}\int\frac{z\,dz}{\sqrt{(\alpha-z)}\sqrt{(1-zz)}}$$

erit per ſeriem

$$y=\frac{b}{\sqrt{2}}\int\frac{z\,dz}{\sqrt{(\alpha-z)}}\left(1+\tfrac{1}{2}\,zz+\tfrac{1.\,3}{2.\,4}\,z^4+\tfrac{1.\,3.\,5}{2.\,4.\,6}\,z^6+\text{etc.}\right)$$

vnde, integrando a termino $z=0$ ad terminum $z=\alpha$, ob $y=FA=g$ erit

$$\frac{g\sqrt{2}}{b}=2\,\alpha\sqrt{\alpha}\left(\tfrac{2}{3}+\tfrac{1}{2}.\,\tfrac{2.\,4.\,6}{3.\,5.\,7}\,\alpha^2+\tfrac{1.\,3}{2.\,4}.\,\tfrac{2.\,4.\,6.\,8.\,10}{3.\,5.\,7.\,9.\,11}\,\alpha^4+\text{etc.}\right),$$

ſiue

$$\frac{g}{b\sqrt{2}}=\tfrac{2}{3}\alpha\sqrt{\alpha}\left(1+\tfrac{2.\,6}{5.\,7}\alpha^2+\tfrac{2.\,6.\,6.\,10}{5.\,7.\,9.\,11}\alpha^4+\tfrac{2.\,6.\,6.\,10.\,10.\,14}{5.\,7.\,9.\,11.\,13.\,15}\alpha^6+\text{etc.}\right)$$

§. 9. Quod ſi iam angulus ζ valde paruus ſtatuatur, ita vt ſufficiat terminos primos adhibuiſſe, ob α valde paruum, ergo $\frac{a}{b\sqrt{2}} = \sqrt{\alpha}$, ideoque

$$\alpha = \text{ſin.}\,\zeta, = \frac{aa}{2bb}, \text{ erit}$$

$$\frac{g}{b\sqrt{2}} = \frac{2}{3}\alpha\sqrt{\alpha} = \frac{2}{3}\cdot\frac{a^3}{2b^3\sqrt{2}}, \text{ ideoque } g = \frac{a^3}{3bb} \text{ et}$$

$$f = \frac{a}{1 + \frac{a^4}{15b^4}} = a\left(1 - \frac{a^4}{15b^4}\right),$$

figura hinc curuae ſatis exacte cognoſcitur. Erit enim

$$y = \frac{xx(3a - x)}{6bb}$$

et radius oſculi in puncto M $= \frac{bb}{a-x}$; vnde patet radium oſculi in B fore $\frac{bb}{a}$ et in A $= \infty$. Quod ſi axis horizontalis ex A capiatur, ac ponatur $AV = t$ et $VM = u$, reperietur $u = \frac{3aat - t^3}{6bb}$; vnde patet Curuam cis et vltra A binas portiones aequales habere atque vtrinque in infinitum porrigi.

PHY-

PHYSICA.

BLENNIORVM DVAE SPECIES
EX
MVSAEO ACADEMICO DESCRIBVNTVR.

Auctore

W. SVIEF.

Deſcriptio. I.

Blennius Muraenoides.

Longitudo totius - - - -	6 pollic.	10 lin.	Tab. VI.
—— —— Capitis ad angulum operculorum -		11 lin.	Fig. 1.
Latitudo ſub pinnis pectoralibus - - -		7 ½ lin.	
—— —— trans oculos - - - - -		5 ½ lin.	
—— —— baſeos Caudae - - - -		2 ½ lin.	
Longitudo pinnae pectoralis - - - -		4 ½ lin.	
—— —— pinnae caudae - - - -		5 lin.	
Diſtantia ab apice roſtri ad pupillam oculi - -		3 lin.	
Craſſities corporis ſumma - - - - -		2 lin.	

Corpus Compreſſum, enſiforme, alepidotum, laeve; cute trunci fuſco-cineraſcente, capitis ventrisque albicantiore.

Caput cathetoplateum, proportionale, deſcendens, apice ſubretulo, nudum, ſubtuberculatum.

Os mediocre, oblique-transuerſum, rictubus valde deſcendentibus.

Roſtrum obtuſiuſculum, trigonum, breue; maxillis aequalibus; ſuperiore ſurſum compreſſa, lateraliter explanata, inferiore plagioplatea, aſcendente, poſterius diuiſa; labiis carnoſis, laxis; ſuperiore integro, inferiore lateraliter tantum intra foueam condendo; dentibus minutis, rectis, ſubaequalibus, anterioribus duplicis ſeriei.

Nares anteriores, tubuloſae, ſolitariae, minimae, labiis proximae.

Oculi mediocres, ſupremi, vicini, roſtro propinquiores, depreſſi, ouales, nudi, iridibus liuidis vel nigricantibus; pupilla albo-flaua.

Opercula branchialia ſimplicia, acuminata, fraenata, fraeno poſterius ab angulo aperturae ad pinnam pectoralem in paruam fimbriam excurrente, laeuia, tegentia. Membrana branchialis triradiata, cutanea, in medio, vbi fiſſura maxillae inferioris eſt, introrſum plicata, poſtice explanata, patens. Apertura branchialis lateralis, (a tergo examinanda) mediocris, oblonga, operculata.

Pori

Pori circa oculos per arcum orbitae inferiorem in aequali diſtantia ſiti 8; totidem a vertice vtrinque per genam atque maxillam inferiorem vsque ad labium inferius; tres eorundem in vertice, duobus nempe in vtroque bregmate et vno in media fronte. Eorundem in loco, vbi ſpiracula lateralia muraenis ſunt, quinque in linea recta ſiti, lineae laterali correſpondentes.

Frons triangularis, conuexiuſcula; nucha gulaque planiores.

Truncus complanatus; dorſum monopterygium; pinna aculeata, cute veſtita longitudinali, continua, connata, aculeorum apicibus ſolis extra cutem eminentibus. Latera complanata; linea lateralis vix conſpicua, niſi ad caudam, media. Anus in medio corporis ad exordium pinnae ani.

Pinnae pectorales oblongo-rotundatae.

Pinnarum ventralium loco aculei minimi vix conſpicui.

Pinna ani longitudinalis, aequalis, connata cute tecta, aculeis mollioribus.

Pinna caudae oblongo-rotundata, radiata.

Deſcriptio. II.

BLENNIVS SIMVS.

Magnitudo Cernuae.

Tab. VI Fig. 2. Corpus Cathetoplateum, lanceolatum, alepidotum, cute laeui, tenuiſſima.

Caput craſſiuſculum, breue, ſurſum compreſſum; deorſum latius, decliue-truncatum, nudum; fronte protuberante in medio canaliculata; occipite ſurſum cathetoplateo, vertice plano, antrorſum decliuiori, nucha eminentiori, a tergo canali caput a trunco ſeparante, ſat profundo vtrinque ad opercula deſcendente.

Ore infero, lunari, terminali, ſatis amplo; maxillis plagioplateis, arcuatis, inaequalibus, ſuperiore longiore; labiis membranaceis, tennuiſſimis, ſerratis; dentibus in vtraque maxilla vnius ſeriei tennuiſſimis, linearibus, rectis contiguis, aequalibus.

Nares geminae, remotiuſculae, poſteriores ante oculos rotundatae, anteriores ſibi parum viciniores, lunulares, plumula tectae.

Oculi ſupremi, grandiuſculi, ſibi inuicem approximati, protuberantes; cyrrho ſupra quamuis orbitam vnico, verticali, minimo.

Oper-

Opercula branchialia parua, diphylla, flexilia, nuda, tranſparentia, poſterius acuminata; membrana branchiali ſex-radiata, laterali, aequali, late-patente, ſupra infraque corpori cute annexa; apertura branchiali laterali, perpendiculari, mediocri, operta.

Gula plana, lata, cute fere ad vsque pinnas iugulares obtecta.

Truncus: dorſo monopterygio, ad baſin pinnae dorſalis, acuminato, antrorſum retrorſumque leuiter deſcendente; lateribus applanatis, laeuibus; abdomine tumidiusculo, deorſum applanato; ano in medio corporis; cauda lanceolata, truncata.

Linea lateralis curua, primum a capite dorſo parallela, dein ad medium corpus deorſum inflexa, atque pinnae anali ad caudam paralleliter deſcendens, laeuis, punctis ſimplicibus albis notata.

Pinna Dorſi longitudinalis, continua, anterius in ſuo exortu ad nucham tuberculum habens adipoſum, poſterius pinnae caudae per membranam adiuncta, radiis aequalibus, ramentaceis, ramento primi caeteris longiore; numero 27.

Pinnae ventrales paulo ante pinnas pectorales, diuaricatae, exiguae, biradiatae, radio interiore longiore, carina inter ipſas ſagittata, antrorſum in cuſpidem mucronata.

Pinnae

Pinnae pectorales imae, ampliſſiae, rotundato acuminatae; radiis 15. quinto et ſexto lorgioribus.

Pinna Ani longitudinalis, aequalis, diſtincta, ramentacaea; radiis 17. vltimo breuiori.

Pinna Caudae rotundata; radiis 15. lacinia inferiore nigreſcente; caruncula lanceolata, parua, e media baſi in pinnam excurrente; Pinna caudae ſpuria in coniunctione pinnae dorſalis cum caudali minima, cute tecta; radiis minimis quaternis vel quinis.

Dimenſiones.

Longitudo totius ab apice roſtri ad extremum Caudae	3 poll. 11 lin.
—— —— Capitis a fronte ſima ad canaliculum transferſalem pone nucham	6½ lin.
Craſſities Capitis ad baſin operculorum -	8'''
Altitudo faciei - - - - - - -	6'''
Eiusdem altitudo ſub oculis - - -	4'''
Altitudo trunci ad pinnas pectorales -	11'''
—— —— minima ad baſin caudae - -	4'''
Craſſities trunci ſub pinnis pectoralibus -	7'''
—— —— minima ad baſin caudae - -	2'''
Diſtantia a maxilla ſuperiore ad nares anteriores - - - - - -	3'''
—— —— a naribus anterioribus ad poſteriores - - - - -	1'''
—— —— a naribus poſterioribus ad medium oculi - - - -	2½'''

Diſtan-

	poll.	lin.
Diſtantia transuerſalis inter vtramque orbitam per verticem - - - -		2'''
—— —— inter angulos oris - - -		6'''
—— —— ab apice roſtri ad baſin pinnarum ventralium - - -		1'''
Longitudo pinnae dorſi - - - -	2''	5'''
Altitudo eiusdem absque ramentis - -		5'''
Longitudo pinnarum pectoralium - -		8'''
Latitudo earundem - - - -		6'''
Longitudo pinnarum ventralium - -		6'''
—— —— pinnae ani - - -	1''	5'''
Altitudo eiusdem - - - -		3'''
Longitudo pinnae caudae - - -		9'''
Latitudo eiusdem - - - -		5'''

Fig. 3. ſiſtit piſcem reſupinum;

Fig. 4. repraeſentat caput piſcis a trunco ſeparatum et inuerſum.

DE FINIBVS PARTIVM CORPORIS HVMANI GENERATIM; SPECIATIM DE VSV PLICARVM, QVAE IN VESICVLIS FELLEIS NONNVLLORVM CORPORVM INVENIVNTVR.

Auctore

C. F. WOLFF.

Pars I.

De finibus partium corporis humani.

Monſtra ſecando didiceram, ſi forte contingeret, vt fabricae cuiusdam vſus, aut finis in ea naturae, intelligi non poſſit; tum ſimiles in aliis exemplis ſimilibus eſſe continuo quaerendas ſtructuras; in quibus quippe raro acciderет, quin plenum naturae conſilium et pateat ſimul et appareat, naturam in priori, intellectu difficili, ſtructura ſuo fine excidiſſe.

Erat monſtrum (*) bicorporeum perfectum, ex puellis com-

(*) Inter ea, quae in Muſaeo academico conſeruantur, et quibus deſcribendis nunc occupatus ſum.

compoſitum duabus integris, thoracibus et abdominibus ad vmbilicum vsque connatis. In eo duo erant ventriculi, dexter alter, alter ſiniſter; ille pro dextra, hic pro ſiniſtra puella. Dexter, vt ſolet, in ſiniſtro ſuae puellae hypochondrio ſitus, duodenum producebat, quod transuerſim fere ad mediam communem vtriusque puellae, qua connatae erant, epigaſtricam regionem progrediebatur. Hic flexum illud deorſum in ieiunum, in ileum, et in craſſa porro inteſtina continuabat, in quibus nihil praeter naturam obſeruabatur. Ventriculus autem ſiniſter, in ſiniſtrae puellae hypochondrio ſiniſtro poſitus, principium vix produxerat duodeni, quod pariter caeterum verſus illam communem epigaſtricam ſedem directum erat, quin clauſus iam iſte canalis inteſtinalis finiebatur. Nec ſenſim ſenſimque, velut urachus ſolet, contractum duodenum erat et anguſtatum, quo ſenſim ceſſaret, ſed coecum ſaccum formabat amplum inflatum; hoc terminabatur. Ab ano, quem peruium in hac ſiniſtra puella repereram, rectum inteſtinum et colon erat et caecum cum proceſſu vermiformi et pars quoque aliqua ilei, quae verſus mediam circiter partem ilei dextrae puellae tendebat, in eamque membranis ſuis continuabat. Cauitas autem aliquot lineas ante contactum vtriusque inteſtini coalescentibus membranis aboleta erat, adeo vt nulla inter vtrumque canalem inteſtinorum communicatio eſſet.

Quis finis ergo naturae eſſe potuit in formando hoc ventriculo clauſo? nullum fuiſſe et caecam naturam in conſtruendis operibus ſuis agere, nemo eſt, qui cogitet; nec ſola naturalis ſtructura, ſed ipſa monſtroſa quo-

que plena eſt vbique artificiis, quibus ſatis ſuperque Creatoris exiſtentia demonſtratur, qui quippe ita vires ſtruentes inſtruxerit, direxeritque, vt, dummodo nullis turbentur obſtaculis, non alias niſi determinatas et finibus ſuis diuinis aptas fabricas efficere poſſint. At vſu tamen actu ventriculum hunc noſtrum carere, non minus eſt manifeſtum, cum neque in chylum ingeſti cibi mutari, nec egeri potuerint eorum reliquiae. Quod proximum huic ſimilitudine erat bicorporeum monſtrum alterum, ſimiliter completum, ſimiliterque compoſitum ex duabus puellis integris, thoracibus abdominibusque ad vmbilicum vsque concretis, nodum omnino explicuit.

Duo in eo pariter erant ventriculi, vterque in hypochondrio ſuae puellae ſiniſtro ſitus. Vterque plane vt ventriculus dexter in monſtro priori duodenum producebat, transuerſim progrediens verſus mediam epigaſtricam regionem, qua connatae puellae erant. In hac ſede duodena confluebant in vnum ieiunum commune! Hoc inde deſcendendo ſolitasque conuolutiones producendo in ileum quoque continuabat, quod ad mediam circiter ſui partem vsque pariter et ſimplex erat et vtrique puellae commune. Hinc illud vero in duo rurſum diuidebatur ilea, dextrum alterum pro dextra puella alterumque ſiniſtrum pro ſiniſtra. Quoduis eorum ſuum pro ſua puella et coecum producebat cum proceſſu vermiformi et colon et rectum denique inteſtinum, ad anum quoduis ſuae puellae ſolito modo finitum.

Nullum ſane dubium eſt, quin ipſa haec inteſtinorum fabrica et norma fuerit, quam pariter in priori monſtro

ſtro conſequi naturae conſilium erat. Perfecta ſimilitudo ventriculorum, duodenorum, horumque progreſſus in monſtro vtroque, modo vt ſiniſtrum in priori incompletum eſſet, deinde ieiunorum et ileorum in vtroque ſimilitudo, quae in priori quidem propria eſſe videbantur puellae dextrae, at certe communia erant vtrique, denique diuiſio ilei huius communis in duo propria ilea, pariter in vtroque monſtro obvia, modo vt in priori ſiniſtrum illorum imperuium eſſet, manifeſto demonſtrant, ſtructuram plane eandem eſſe, quam in vtroque monſtro natura efficere ſtuduerit; at rite eam in poſteriori ſucceſſiſſe; caruiſſe ſucceſſu in priore.

Sic finis ergo naturae; quo nulla fabrica corporis humani caret, quique incomprehenſibilis in exemplo priori videbatur, ſole clarius in poſteriore apparet ipſumque ſimul naturae finem fruſtratum in priori exemplo docet.

Numeroſa eiusmodi exempla in monſtris occurrunt, vbi partes male conſtructae vſu omnino carent, et finis in conſtruendis his partibus naturae nullus fuiſſe videtur, qui tamen appareret, dummodo ſimilia exſtarent exempla, in quibus melius illae ſtructurae ſucceſſiſſent. Seriem talium fabricarum recenſui ex Actis Pariſinis in Diſſertatione de vitulo bicipite, Commentariorum noſtrorum Tomo XVII. inſerta. Leporis ibi monſtroſi mentio quoque facta eſt inter alia, cuius oeſophagus ſimili modo, vt ventriculus in noſtro exemplo, clauſus finiebatur, nec ventriculum porro aut inteſtina producebat. Vti nullum dubium eſt, ſimiliter cum eo oeſophago atque cum noſtri exempli ventriculo eſſe comparatum; ita de reliquis illis

ſtructuris inutilibus omnibus ſic eſſe iudicandum arbitror: *eſſe in ſingulis fabricam aliquam peculiarem, a ſolita diuerſam, quam vt efficiat, natura fuerit molita, quae tamen ob impedimenta quaecunque, ſtruentibus viribus oppoſita, effici non potuit.*

Dum duo ventriculi in monſtro noſtro ſecundo duo duodena producunt, quae in vnum confluunt tenuium inteſtinorum canalem communem, deinde vero denuo in duos craſſorum ordines proprios puellarum diuiduntur; hoc facile inſtitutum fuiſſe patet ſapientis naturae, vt quaelibet puella ſuos manducaret et deglutiret cibos, vt ſuos digereret quaelibet in proprio, quo gaudet, ventriculo, chylumque efficeret pariter in ſuo quaelibet duodeno, tum vero quam vtraque puella confeciſſet maſſa, chylo et ſuccis nutritiis grauida, in vnum vt confunderetur receptaculum commune, ex quo quaelibet poſtea, quantum ſibi opus eſſet, puella, et quantum conueniret ſuae ſaluti, hauriret; denique peracto abſorbtionis negotio, vt quaelibet denuo ſuum conferret ſymbolum ope craſſorum inteſtinorum, quibus quaelibet gaudet propriis, ad expellendas faeces.

Singulare beneficium naturae in ea re poſitum eſſe et quaſi praeſidium ſalutis, neminem fugit. Si alterius puellae ventriculus debilis viresque digeſtrices cum proſtrato appetitu labefactatae fuerint, quod ex cibis non modo, nimia quantitate ingeſtis, ſed etiam ex aliis cauſis quam plurimis fieri poteſt, quodque dum fit, cruditates in inteſtinis et febres inde intermittentes aliorumque permultorum morborum ſeriem producere ſolet; puella a cibis,

bis, quos nullus capere vrget appetitus, abſtinebit prorſus, nutrietur interim ſuccis ciborum, quos altera puella ſuo digeſſit ventriculo, ex communi ieiuno et ileo hauſtis; nec niſi paulatim, prout vires ventriculi ſenſim et appetitus reſtituuntur, cibos capere incipiet, donec tandem integrae ſui ventriculi vires ſolitam proprii victus rationem permittunt. Si plus contra appetitus viresque ventriculi valerent alterius puellae, quam quidem ſanitas eius puellae ferre poſſet, quod haud minus crebro ſolet contingere, vndeque plethora cum ſua, quos ſecum ducit, morborum cohorte et febres rurſum acutae varii generis, originem trahere ſolent; tum ea puella, quae magis in ſuccos nutritios ſanguinem convertere valet, cuiusque vires maiores ampliorem ſui corporis nutritionem poſtulant, maiorem quoque partem ſuccorum ex communi maſſa inteſtinali abſorbebit, abſtrahetque alteri puellae, quae minus valet, quaeque facile magis quam opus eſſet ad conſeruandam ſanitatem, ſanguine poſſet oppleri, conuertetque in ſui corporis nutritionem et maius inde incrementum capiet, pingueſcetque magis quam altera, cui ſanitatem ſaltim hac capta ſua pinguedine et incremento maiori tuebitur. Si alteri denique puellae aluus fuerit obſtructa, nullum incommodum inde poterit oriri neque huic ipſi neque alteri puellae; nam omnes communis maſſae cibariae faeces flatusque abduci poſſunt per eum anum, qui apertus eſt. Verbo vt dicam, plerique eorum morborum, qui originem ex inteſtinorum affectionibus vel ex primis viis, vt ſolent vocari, ducunt; et quorum ſane numerus haud paruus eſt, aut plane praecaueri aut miro modo mitigari tamen poterunt hac ſimplici eleganti ſtructura inteſtinorum.

Hic

Hic finis ergo fuit, quem et in priori et in poſteriori monſtro benefica natura intendit, cuiusque cauſa ſingularem et miram hanc inteſtinorum fabricam in poſteriori conſtruxit, et in priori quoque ſtruere conabatur, quae tamen in eo non ſucceſſit. Et ſimiles ergo pariter vbique quoque arbitror eſſe peculiares et a ſolita diuerſas ſtructuras, quas intenderit natura, quaeque caruerint ſucceſſu, vbicunque inutiles et vſui cuicunque contrarias in monſtris fabricas invenimus. *Quare et vſu quidem omnino aliquando, imo et ſaepe, partes fabricasque earum, a natura formatas, nunquam autem ſine benefico et ſapienti carere exiſtimo.*

Quam mire fabrica corporis noſtri in variis eius exemplis differat, in diſſertatione, de inconſtantia fabricae corporis humani expoſitum eſt. (Nov., Act. T. II. P. II.) Inter eas nonnullae ſunt varietates, in quibus manifeſto cognoſcas, eſſe alias ad certum ac determinatum finem praeparatas, vſuique apprime aptas, alias contra quibus is finis, aut vſus, cui deſtinata ſtructura eſt, nullo modo obtineri poſſit; proinde ſucceſſiſſe in aliis exemplis naturae opus, caruiſſe ſucceſſu in aliis. Sic valuulam *Euſtachii*, dum vera et ad mentem naturae elaborata fabrica eſt, certo ſuo munere fungi nullum eſt dubium; ſiue ſanguinem caueat venae cauae ſuperioris in corpore adulto, quo minus in inferiorem illabatur, ſiue in foetu inferioris venae cauae ſanguinem auertat a ſinu dextro, dirigatque ad orificium huius venae ſiniſtrum quod foramen ouale vulgo dicunt. Si nunc haec valuula penitus perforata, et ſtructura plane reticulata, filamentis tenuiſſimis compoſita fuerit, veluti frequentiſſime reperitur, quem vſum tum illa in

in foetu, quem in adulto, quem denique vnquam vllo tempore aut vllo modo vſum habere poteſt? Sic illas varietates in eo poſitas eſſe vides, vt magis in aliis exemplis, in aliis minus, natura ſuum ſcopum attigerit. Quamvis autem non in ſingulis, quae dantur, varietatibus vſus eiusmodi phyſiologicus obtineat, cui nunc magis nunc minus varians ſtructura ſit apta, velut in hoc valuulae *Euſtachii* exemplo; cum viſcerum imprimis, haud aeque vaſorum, neruorum oſſiumque et muſculorum varietates eius indolis eſſe, in memorata Diſſertatione vidimus; hoc tamen conſtitit atque omnino certum eſſe videtur, *eſſe in ſingulis normam, aut certam ideam, ad quam natura ſtruxerit, quam magis in aliis corporum exemplaribus, minus in aliis, ſit conſecuta, quaeque ſi vnquam expiſcata a nobis et rite expreſſa eſſet, tum demum hanc veram atque genuinam corporis noſtri repraeſentationem dicere poſſemus.*

Haec norma ergo, niſi vſus aliquis phyſiologicus datur, is finis eſt, quem ſtruendo natura in vniuerſo humano corpore reſpicit, cuique dum propius in aliis exemplis, in aliis minus accedit, copioſae illae varietates in ſingulis partibus eius oriuntur. Proinde quot varietates in fabrica corporis humani, quae innumerae ſane ſunt, tot exempla habes ſiniſterioris ſucceſſus naturae in conſtruendis operibus ſuis. *Multum abeſt igitur, quin omnes ac ſingulae partes in corpore humano ſuum habeant determinatum et exquiſitum vſum, quin ſingulae ſint prorſus perfectae, et omnibus abſolutae numeris; vt opinio eſſe videtur anatomicorum quaſi omnium. Normam autem dicas ſane perfectam, quam ſapientiſſimus praeſcripſit Creator, quam et conſequuntur vires, materiae inditae, dummodo nullis turbantur obſtaculis; quod*

tamen paſſim fieri, vti tot alia tam phyſica quam moralia mala, Numen conceſſit.

Nec ſolis in monſtris autem, neque in iis atque in indiuidualibus ſimul ſtructuris variabilibus ſolis, ſed etiam in ipſa et naturali et ſolita conſtantique atque perpetua ſtructura exempla occurrunt certa operum imperfectorum atque inutilium; modo vt cautos nos eſſe oporteat in diiudicandis finibus naturae, quibuscum haud pariter atque cum illis, quos fruſtratos hactenus in monſtris et in varietatibus vidimus, comparatum eſt, quique non niſi poſtremis tandem conſiderationibus apparebunt. Urachus in foetu humano longior nunc, nunc breuior, nunquam tamen per totum funiculum vmbilicalem continuatus reperitur; nec vnquam obſeruata allantois eſt, in quam ille aperiatur. Sine omni vſu ergo in corpore humano quidem hunc ductum exiſtere, dubium non eſt; neque finis in eo naturae vnquam nobis pateret, niſi in animalium ſtructura eum percepiſſemus, in quibus urachum amplum ex veſica per totum funiculum vmbilicalem continuari videmus in allantoidem vsque, multoties ipſa veſica maiorem, quo, poſtquam repleta veſica eſſet vrina, haec porro inde ad allantoidem deduci, in eaque, quo vsque in vtero materno foetus haeret, contineri queat. Vbi ſolus ductus ergo, idemque breuis, et ad initium modo funiculi vsque continuatus, exiſtit, vbi nullum receptaculum porro eſt, in quod ſe iſte effundat; nonne ſibi ipſi ſuisque finibus ibi contraria potius natura eſſe videbitur, quae perforatam hoc ductu veſicam vrinariam et effluentem fabricauerit, quae tamen deſtinata eſſet ad continendam vrinam? Sic iudicaremus de uracho humano,

niſi

niſi in animalibus hic ductus et finis naturae nobis notus eſſet; ſic de ventriculo clauſo iudicabam monſtri ſuperius dicti prioris, antequam poſterius ſecueram; ſic actu, at perperam, iudicamus de cloaca illa communi in *Duverneyano* monſtro, (*) in quam faeces aluinae et vrina vna cum ſemine maſculino colligebantur. Sic denique de omnibus illis ſtructuris inutilibus iudicamus, quae adeo frequentes in monſtris inueniuntur, quousque ea fabrica ignota nobis eſt, cuius producendae naturae conſilium fuit.

In animalibus cel. olim *Güldenſtaedt* exemplum nobis memorabile inutilis ſtructurae ſuppeditauit in ſpalace ſuo microphtalmo. Nulla eſt orbita in animalculo iſto, nec cutis apertura exterius vlla in regionibus oculorum obſeruatur, quo radii luminis ad bulbum oculi peruenire poſſent; nec viſus ergo ſenſatio vnquam fieri poteſt in eo animali, quod vitam caeterum ſub terra agendo nec opus viſu habet. Attamen in ima parte foſſae temporalis ſub apophyſi zygomatica, et ſub ipſo crotaphyte muſculo, corpus inuentum eſt glanduloſum. In eius parte interiori materia erat puri ſimilis, in qua corpuſculum nidulabatur, ſeminis papauerini magnitudine et figura, globoſum, nigrum, nitidaque ſuperficie praeditum, vt facile illud rudimentum bulbi oculi eſſe cognoſceres. Inutilem eſſe hunc bulbulum oculi, nemo certe inficias ibit. Verum molitam eſſe naturam fruſtra organum viſus in animali, quod viſu ob vitae genus gaudere non poteſt, id ſane improbabile maxime eſt, et ſapientiae illius manifeſtiſſimae contrarium, quin potius in eo eam eſſe exiſtimes, vt dele-

(*) Mem. 1706, et Diſſ. de Vitulo bicipite in Comment. Tom. XVII.

at hoc organum, quod, quanto vſui minus, multis incommodis et noxis inferendis tanto magis idoneum eſſe videtur; ſiue hoc poſterius autem ſiue prius credas, ſiue alium quoque naturam finem habere arbitreris nobis ignotum, hoc certum tamen ſemper erit: ſtructuram eſſe imperfectam atque inutilem.

Denique, ad corpus humanum vt redeamus, quam toties inquiſiuere anatomici glandulam thyreoideam, cuiusque vt vſum detegant, toties exſculpere conati ſunt fruſtra ductum excretorium, quaſi id quidem fieri nullo modo poſſet, vt vſu, aut etiam ductu, haec glandula careat, eam ad huiusmodi partes pertinere inutiles, aut quae vſu vero carent, non pariter fine, nullus dubito. Ipſa res facile demonſtrat. Glandula eſt vera conglomerata, glandularum more iſtarum ſtructa, quam pariter vaſa adeunt magna arterioſa, quaeque venoſa reddit. Fluidum denique ipſum ſecretum nonnunquam in celluloſis interſtitiis reperitur. At ductus, quo id ſecretum colligi, et quin denuo abſorbtum in venoſum tranſeat ſanguinem, caueri queat, nullus exiſtit. Tota ergo glandula conglomerata vna cum ſuis arterioſis et venoſis vaſis haud minus inutilis pars eſt, ac teſtes cum ductibus deferentibus in monſtro illo Duuerneiano, quae miro artificio ſecretum et perfectum ſemen virile in cloacam reiiciebant communem vna cum faecibus aluinis.

Idem de thymo glandula in foetu, idemque de capſulis renalibus dici poteſt, quas tanto opere *Duvernoi* olim in Commentariis noſtris veteribus, quasque alii inquiſiuerunt. Inquirant ſane et alii porro; nunquam tamen

men mea quidem ſententia hos ductus ſperatos in homine reperient. In animalibus autem, in variisque eorum generibus, ſi quis leges naturae ſpeculari, et genium, et normas, et fines, voluerit; quin tandem aliquando id organum in aliquo eorum inueniat, quod in hominibus nunquam ſtudioſa natura perficere aut potuit, aut voluit, ſpes omnis prorſus non deeſt. Nam certum eſt finem ſuum habuiſſe etiam in homine naturam, cum glandulam ſtabiliret thyreoideam, aut renes ſuccenturiatos, aut thymum; certumque, normas dari ſtructurae perfectae, ad quas ſingulas has partes efficere ſit conata; improbabile autem, nunquam in vllo tot generum animalium toties hoc opus repetitum ſagaci et artifici naturae ſucceſſiſſe.

Sic pariter ergo cum plicis quoque comparatum eſſe exiſtimo, quae in veſiculis felleis nonnullorum hominum, et quae conſtanter artificioque maiori ſtructae in animalibus quibusdam, velut in tygride et in leone, reperiuntur. Normam eſſe arbitror, etiam in homine, hanc ſtructuram, qua repletum plicis veſiculae collum receptam bilem retinet, nec niſi lentiſſimo gradu paulatim tranſire ſinit. Eundemque plane in ſingulis corporibus naturae finem eſſe puto. Et ſi in quibusdam, vel etiam in multis eorum exemplis plicae vel deſunt vel obſoletae et minus ad vſum aptae exiſtunt, vitio id factum credam, et quo normam ſuam et finem ſuum natura non ſit conſecuta.

Proinde ſi de fine et vſu, quem intenderit his plicis natura, ſit iudicandum; velut egregia, quam in monſtro ſecundo inueneram, ſtructura inteſtinorum per-

 verſam

verſam ac incomprehenſibilem illam explicauerat, quam in primo miratus monſtro eram; veluti illa huius indicatrix quaſi et demonſtratrix fuerat; velut animalium porro fabrica urachi vſum et finem in homine demonſtrat, ſine qua nulla eius vnquam notio nobis fuiſſet; veluti denique naturale organum viſus corpus explicat glanduloſum, quod in ſpalace inuenitur; ſic pariter in ſpeculandis finibus vſibusque plicarum veſiculae ad perfectiſſimas non modo, quae vnquam in genere humano viſae ſunt, plicas, ſed ad ipſas eas quoque reſpiciendum eſſe exiſtimo, quae in leone et tigride reperiuntur, quae multoties potentia incarcerandi bilem etiam perfectiſſimam humanam fabricam ſuperant. Quamobrem, vt prius leonis et tigridis ſtructuram deſcripſeram; (*) humanam deinde iis adiunxi, (**) et propriam huic diſſertationem de varietatibus fabricae corporis humani praemiſi, (***) qua, licet in ſingulis corporibus deſcripta plicarum forma non inueniretur, eam tamen veram humanam fabricam eſſe, et normam, conſtet.

Nunc autem, vt porro in ſpeculandis finibus naturae progrediamur, ſi indiuidualia illa naturae vitia, quae tanquam varietates conſiderare ſolemus, et quorſum defectus plicarum veſiculae quoque ſpectat, excipias, *rara exempla eſſe exiſtimo fabricarum inutilium in ſtabilita conſtanti corporis humani ſtructura*, nec fere vlla praeter ea, quae iam dicta. Pauca inter muſculos forte inuenias, vbi niſi

(*) Nou. Comment. Tom. XIX. Nou. Act.
(**) Nou. Act.
(***) Nou. Act.

niſi irritus plane ſucceſſus, tamen haud ſatis quidem ex voto opus naturae eueniſſe videtur, velut in ſubſternalibus muſculis et in quibusdam partibus intercoſtalium, deinde in palmari et in plantari; in quibus aliam, haud abſimilem forte, at aliam tamen, fuiſſe credo ideam naturae quam non potuerit exſequi. In vaſis autem, in neruis, in oſſibus, ſicut in muſculis plerisque, vel omnibus, reliquis, nullum inutilis, ne dicam non admirandae, ſtructurae exemplum exiſtit. Neque in viſceribus puto vllum reperiri, quo non ad amuſſim natura finem ſuum ſapientiſſimum, vt ſunt fines certe in omnibus ac ſingulis exemplis, explerit.

Namque lienem quod attinet, quamuis haud pauci anatomici de genuino ac vero eius vſu dubitauerint; atque etiam dum lien omnino valdopere a reliquis differt viſceribus, quae quippe omnia fere praeter vaſa ſanguinea aut ductus habent aut vaſa alia, aut organa tamen exhibent peculiaria, quibus ſuo quoduis munere proprio fungi facile demonſtrent; cum lien contra ſolis ſanguineis vaſis inſtructus ſanguinem ſolum accipiat eundemque reddat; tamen de veritate communis receptae *Berhavianae* et *Hallerianae* opinionis planiſſime ſum perſuaſus, qua diſſolui ſanguinem Viri Illuſtres putant leni calore et mora, ſtagnando in ſpongioſo et molli liene, eoque nanciſci aliquem putredinis gradum, indolemque induere alcalinam; ſic praeparari ad bilificationem, quae in hepate fieret, quorſum nunc continuo ſanguis, de liene eductus, ferretur. Cum enim prouentui ſic bilis faciliori vberiorique ex ſecretione hepatica ſolummodo lien inſeruiat, hepatique adeo ſubminiſtret, ſi proprio ductu ſecretum a ſanguine in liene

liene fluidum ad hepar ſit traducendum, vel cum ſanguine hepatis denuo confundi id oporteret, vel commiſceri cum eius fluido ſecreto, quod vtramque tamen et contra leges eſſet, vbique in corpore noſtro obſeruatas, et inutile prorſus; cum breuiori via et apparatu breuiori ſic, vt nunc eſt, res eadem, multo etiam melius atque elegantius, effici queat. Nullo ergo, niſi ſanguineo, quem vena praeſtat, ductu lieni opus fuit, nec alio hepati, bilem confecturo, fluido, niſi ſanguine lienis ipſo. Et ductus aeque ac fluidum lienis ſecretum apparatum non minus egregium, quem nunc gnari admirantur, quam ipſam functionem hepatis peſſime potius diſturbarent. Quare omnino hanc ipſam, quae exiſtit, lienis ſtructuram normam eſſe arbitror atque ideam naturae, quam ſit feliciſſime exſecuta.

Deinde *plerumque, dum finem ſuum natura non obtinet; etiamſi inutilis fuerit ſtructura producta, incommodum tamen inde corpori nullum oritur.* Aut enim non opus fuit eo munere, quo pars perfecta fungeretur, aut corrigit natura ſuppletque adminiculis aliis id, quod opere incepto fruſtrato perficere non poterat. Rarius leuiora quaedam, vix ſenſibilia, clandeſtina mala originem inde petere videntur. Nunquam ſane, niſi in Monſtris, atque id raro quoque, vitae periculum, aut certa mors, ex facto errore conſequitur.

Dum urachus peruius et continuatus in allantoidem vsque non eſt; nec opus eſſe videtur vnquam in homine aut uracho peruio et continuato aut allantoide. Vacuam fere ſemper in iis, quos ſecui, foetibus, ſiue monſtroſis,

ſtroſis, ſiue naturalibus, veſicam vrinariam reperi, nunquam ſane, quantum extendi poſſet, extenſam. Siue per tranſpirationem ergo abundans pars ſanguinis aquoſa eliminetur, ſiue nulla forte abundet in foetu humano; non opus eſſe vides allantoide aut uracho in eam continuato. Quamuis inutilis ergo urachus humanus, nociuus tamen nec ipſe, quousque exiſtit, nec eius, quousque deficit, aut allantoidis, defectus eſt.

Similiter cum glandula thyreoidea comparatum eſſe exiſtimo, et cum thymo renibusque ſuccenturiatis. Relicta opera naturae, atque conſilio neglecta, eſſe puto in genere noſtro, velut urachum; quibus procul dubio excellentem aliquem vſum in creaturis quibusdam aliquando praeſtitit natura aut praeſtat forte adhucdam, nobis ignotum, quibusque, ſi opus ſit homini, nullum eſt dubium, quin facile denuo haec organa perficeret muniretque ſecretoriis ductibus ſuis aptiſſimis elegantiſſimisque.

Nec temere me iſtud poſterius promittere putes. Urachi imprimis exemplo inſiſto. Si vnquam copia vrgeret vrinae; fore continuo, vt urachum haec magis magisque dilatet, penetretque vltro in funiculum, inter vaſa umbilicalia, paretque ſibi viam ea ratione et ductum, tunica ex celluloſa compreſſa nata, denique vt inter membranas amnii collecta et folliculum ſibi efficiat, vel allantoidem, adeo certum mihi eſt, vt nihil ſit certius. Ita enim in primo embryone, non obſtantibus obiectionibus *Halleri*, ad quas facile reſpondeas, ipſa vaſa ſanguinea effici, certum eſt. Non opus eſt ergo uracho nobis perfecto et allantoide, quos facile, ſi opus eſſet, natura perficeret;

nec opus eſſe tuto dicas thyreoidea glandula, aut thymo, aut renibus ſuccenturiatis, quos pariter periiceret negotio, ſi ſit opus, haud difficiliori.

Aliter nonnihil comparatum eſſe videtur cum plicis veſiculae felleae, quas magnas aptasque et potentes ad bilem incarcerandam natura in leone et tygride, parvas contra et quaſi ineptas in hominibus quibusdam, in aliis vix vllas, parauit. Vt peruius enim et latus liberque eſt intus choledochus ductus in animalibus illis, plenum in homine fecit impedimentis, trabeculis filisque et lamellis, quas vix penetrare poſſe bilem crederes tranſeundo. Quod plicis ergo veſiculae efficere non potuit, id idem ipſum vides tamen adminiculis aliis artificiisque effeciſſe ſagaciſſimam naturam. Non ergo conſulto neglexit plicas veſiculae, quarum munere non opus eſſet in genere humano, velut urachi aut thymi, ſed alia potius oppoſuit bili impedimenta, ſubſtituitque plicis, certo teſtimonio, nec munere plicarum careri, nec plicas tamen ipſas ſatis ex voto effici ac perfici potuiſſe.

Dum valuula autem *Euſtachii* cribri inſtar perforata in corporibus nonnulis inuenitur, cuius rei tamen nec vllum alium apparatum ſingularem detegimus, quo perditus illius vſus reſtauraretur; veriſimile eſt, non abſque omni incommodo, quamuis parum ſenſibili forte, aut nonniſi in certis caſibus tantum ſenſibili, id quidem euenire. Animalia nec praedita ſunt *Euſtachii* valuula nec opus habent. In iis, dum adulta ſunt, ſitus venarum cauarum ipſe impedit, quominus ſanguis, a capite redditus, abdominalem ſanguinem redeuntem ſupprimere poſſit; dum foetus

foetus ſunt, curatior inferioris venae cauae ſtructura eiusque eximia diuiſio in duos ramos, quorum dexter ad dextrum ſinum, ſiniſter ad ſiniſtrum, ſanguinem ſuum ducit, ſatis cauet, ne nimium alter ſinus ſanguine, alteri detracto, oppleri queat; cum contra in homine orificia modo ſunt duo venae cauae inferiori loco ramorum, in quibus perturbatio facilius fieri poſſet, niſi valvula *Euſtachii* accederet orificio dextro, qua ſua ſiniſtro ſinui portio ſanguinis attribueretur. Quando nunc ob haec incommoda, ſola in homine timenda, valuulam homini datam eſſe vides peculiarem, elegantem et plane nouam, nec cuiquam quantum ſcimus, animali communem, an praeter neceſſitatem iſtud naturam putes feciſſe? At enim, ſi non facit; aliquid ergo metuendum quoque erit a valuulae huius defectu, vel ab inconuenienti eius ſtructura, qua valuulae munere fungi non poſſit. Reticulatam non modo hanc valuulam ſaepius, ſed adeo tenuem quoque nonnunquam vidi, vt filo ſimilis fuerit; et nuper plane nullam in aliquo corpore reperi; cuius de corde etiam proxime iconem dabo.

Ex hiſce planius nunc naturam intelligere videmur (*) *In monſtris quidem, quorum exempla adduxi, et in indiuidualibus illis vitiis, quae tanquam varietates conſiderare ſolemus, vix dubium eſt, quin ſucceſſu caruerint haec opera naturae, quin norma in ſingulis alia fuerit, quam non expleuit. In his vero, quae in naturali et conſtanti fabrica corporis exempla occurrunt, uracho, glandula thyreoidea, thymo,*

(*) Naturam dum dico, inſtitutionem puto diuinam. Sapientia naturae huius inſtitutionis ſapientia eſt.

thymo, *et renibus ſuccenturiatis*, *organa quidem pariter imperfecta atque inutilia*, *minus tamen infelici ſucceſſu ſic facta*, *quam potius conſilio neglecta cum nihil opus eorum fuerit*, *offendere videmur.* Normam eorum dari, a fabrica ipſa diuerſam, pariter atque in illis, eamque exiſtere alicubi, vel extitiſſe forte aliquando in corpore humano ipſo, et finem quoque dari ſingularem, cum illa norma coniunctum, veriſimile omnino eſt. At opus nec eo fine fuiſſe nec fabrica, ad normam conſtructa, proinde et finem et normam a ſapienti natura neglectam, res ipſa quaſi demonſtrare videtur.

Hoc etiam addere licet, *eſſe forte haec viſcera ita comparata*, *vt ſi vſus eorum veniat*, *in promtu ſit*, *quo extemplo ad normam perficiantur*; *quemadmodum ſuperius in urachi exemplo demonſtratum eſt. Nec dubito*, *quin ſpalax microphtalmus*; *cuius cum organo perdito noſtra illa egregie conueniunt*, *ſi vnquam ad vitam ſuperterraneam rediret*, *et breui facilique negotio perfectum ſuum organum viſus recuperaret.*

Quare dum organa integra atque perfecta in corpore humano vel animali repeiriuntur, *veluti urachus cum allantoide in quadrupedibus vel organum viſus in homine animalibusque praeter ſpalacem omnibus*, *finem*, *cum his organis coniunctum*, *natura procul dubio conſecuta eſt. Dum imperfecta autem vel incompleta haec organa offendimus*, *urachum in homine*, *thymumque et glandulam thyreoideam et ſuccenturiatos renes*, *in ſpalace organum viſus*; *is potius finis eſſe videtur ſapientiſſimae et impenetrabilis naturae*, *vt non contenta proſpexiſſe his omnibus*, *quibus opus eſſe poteſt*

animali in eo vitae gerere, ad quod deſtinatum eſt, iis quoque proſpiciat, quibus opus eſſe poſſet in ſtatibus forte futuris. Vt ergo in monſtris, vt porro in indiuidualibus vitiis nunquam naturam fine carere vidimus; ſic minime in iis quoque caret operibus, quae ad conſtantem corporis noſtri fabricam pertinent. Vt finem vero in illis, quem intenderat, non eſt conſecuta natura, ſic contra conſilio potius in hisce ſapientior captu humano ſolitum finem neglexit, quo opus non erat, quique inutilis pariter ac organa ipſa fuiſſet, vt illuſtriorem in parandis commodis etiam futuris conſequeretur.

Pars II.
De vſu plicarum veſiculae felleae.

Tranſeo nunc ad ſpecialiorem vſus plicarum veſiculae felleae contemplationem. Quem inſignem eſſe, vt mira in leone et tigride artificiisque plena ſtructura monet; ſic demonſtrare videntur magna, quae vbique et omnibus modis natura adhibet conamina ad retinendam bilem, apparatusque multifarii, quos applicat: plicae in homine, in leone labyrinthi, receſſus et folliculi, abyſſi in tigride, in homine rurſum trabeculae illae et cellulae, quibus plenus eſt ductus choledochus, tum illae flexiones frequentes complicationesque colli veſiculae et ductus eiusdem choledochi, denique id quoque, quod vbi remorationi et retentioni bilis ſatis proſpectum eſt plicis et receſſibus in ipſa veſicula, velut in leone et in tigride,

 chole-

choledochus ductus laeuis ſit intus largusque et peculiari ſtructura omni quaſi neglecta late peruius, vbi contra, velut in homine, parum hae plicae veſiculae ad continendam bilem faciunt, miris continuo videas plenum choledochum trabeculis et interſeptis cellulisque et ſpelunculis numeroſis, quas vix credas penetrare poſſe b lem tranſecundo. Haud temere iſtud naturam facere putato. Eſt ſane aliquid ſingulare, et quod ſit alicuius momenti, quod his ſtudioſe quaeſitis obſtaculis tranſeunti bili oppoſitis, intendat.

De Praeparatione, ſeu vulgo ſic dicta ſecretione, bilis.

Quare vt breuibus mentem meam expediam, conſiderari primo velim, eſſe iam ſanguinem quaſi bilioſum, qui hepati per venam portarum adducitur, aut ſane pluribus oneratum principiis bilis, quam nullus eſt ſanguis alius, pulmonalis, renalis, cerebralis, aut qui arterioſus vel venoſus vehitur per extremitates corporis; ſiquidem copioſa alcalinae indolis principia ille ab inteſtinis, diſſoluta alcalino-ſeroſa ſubputrida a liene, et ab omento pinguia habet.

Deinde nil poſſe, conſideres, mechanicam vaſorum in hepate conformationem ad procreandam, vel etiam ad eliciendam bilem ex ſanguine; niſi vt tenuius fluidum ſeroſum anguſtiora vaſa aut ductus recipient, latiora ſanguinem admittant craſſiorem. Pro indole ipſa, guſtu, olfa-

ctu

ĉtu aut tactu ſenſibili, nulla eſt machina in rerum natura, quae poſſit varia a variis diſcernere, quae dulcia ab amaris diſtinguat, aut rubra a flauis, quaeque mucum ſeparet a gelatina, aut ab vrina bilem. Sapores, odores, colores in fluidis et caeteras huius generis qualitates anguli ſane vaſorum eorumque lumina ignorant, haud minus quam directio illorum aut qualiscunque diſtributionis modus.

Quodſi ſolam tenuiorem ſeroſam ergo ſanguinis partem anguſtiores hepatici ductus excipiunt vna cum iis, quae ſoluta in ea parte haerent regnantque, alcalino-oleoſis principiis; nec quidquam in iis vel modificandis vel peculiariter ex ſanguine eliciendis poſſunt; quam bilem hepaticam dicimus, eam nonniſi laticem eſſe vides eius ſanguinis, quem mixtum ab inteſtinis a liene et ab comento hepar accepit. Vt ſi alius ſanguis in hepar introduceretur ſtipatus aliis principiis; alium quoque laticem ductus iidem hepatici redderent; nunc cum ſanguinem hepar accipiat alcalino-oleoſis principiis grauidum, alium quam huius indolis laticem hepatici ductus nec reddunt nec reddere poſſunt.

Latex nunc cyſtidi traditur. Sanguis ab acribus alcalino oleoſis, nociuis, ad nutritionem ineptis, quantum opus eſt, liberatus et depuratus venae cauae et propinquo cordi redditur. Ille vero retentus in ſua veſicula, abſorptis inſipidis quibuscunque, aquoſis et, quae gelatinoſa forte adhucdum in eo et apta ad nutritionem haerent, nunc demum in veram bilem conuertitur. Ad quam conuerſionem quantum plicae contribuant, quantum impedimenta

menta ductus choledochi, et quantum imprimis artificioſa miraque ſtructura in leone, facile intelligitur.

Quae pars laticis hepatici autem digeſtionis tempore non ad veſiculam, ſed ad inteſtina cum aliqua bilis portione producitur, eam tanquam vehiculum bili craſſiori, pauciorique copia, inſeruire opinor, quo minus aut parietibus ductuum et inteſtinorum adhaereſcens conſumatur, antequam ad inteſtinum perueniat; aut acredine eos parietes erodat; prorſus vt proſtatae liquidum, ſeminis potioni cuique expreſſae additum, et volumen auget, receptumque ſemen ad deſtinata loca transfert. Nec magis illam, niſi praeternaturali mora incraſſata forte et concentrata fuerit, quod calculis nonnunquam efficitur, ſufficere puto ſolam digeſtioni in homine et in animalibus carniuoris, quam proſtatae liquidum ſufficeret ad impraegnandam foeminam; quamuis in eo latex hepaticus differat, vt materiam contineat, ex qua concentratione bilis fieri poſſit.

Sic tribus hactenus articulis ſeu diuerſis functionibus praeparationem bilis abſolui patet, quam vni ſoli ſecretioni hepaticae adſcribere, adeoque ſecretionem bilis perperam appellare ſolent. Ad primam earum refero reſolutionem ſanguinis ſeroſo-alcaleſcentem in liene et in venis inteſtinorum, cui et reſorptio adipis accedit et introductio collecti ex tribus fontibus et mixti ſanguinis huius in hepar. Secunda eſt laticis huius ſanguinis copioſi, et multis imprimis alcalino-oleoſis partibus impraegnati, ſeparatio a ſanguine puro ipſo ope radicularum innumerarum, quas per vniuerſum hepar ductus hepaticus diſtribuit,

it, quaeque transuerſim finibus venae portarum, vbi in venae cauae radices hi tranſeunt, inoſculari videntur, eiusque porro laticis collectio et tranſportatio ad veſiculam felleam. Tertiam denique efficit bilis ex latice confectio ipſa in cyſtide, quae ſola quidem tenuium inſipidorum et inertium fluidorum abſorbtione, acrium ſalino-oleoſarum partium concentratione peragitur.

His tribus quartum tamen lubenter adiungam actum, vel quartam functionem, ad praeparationem bilis pariter pertinentem, et quae inter primarias forte referri meretur. Quae lien et inteſtina adferunt bilis elementa, alcalinae indolis ſunt; oleoſae, quae ab omento traduntur. Neque alcalina tamen neque oleoſa natura in bile, ſed ſaponacea, obſeruatur. Vt fieri ergo in tot chemicis experimentis notum eſt, vniuntur ſingula ſalina elementa cum oleoſis, quo noua materies oritur nouis viribus praedita et qualitatibus, alcalina omnis contra natura et oleoſa ſupprimitur. Haec vnio ergo perfecta alcaleſcentium cum oleoſis principiis praeter ea, quae ſuperius dicta, ad bilis perfectae praeparationem et vera re concurrit, et neceſſario ad eam requiritur. Eaque ſolis efficitur propriis viribus elementorum, quae ſe mutuo attrahunt; nec vlli ſtructurae mechanicae hepatis, vel cyſtidis felleae, debetur; ſiquidem et arte in vaſe quocunque ex ſimilibus elementis ſapones confici poſſunt.

Quaeritur, vbinam haec vnio intimior, cuiusmodi velut propria voce mixtiones chymici appellant, peragatur? Sunt quaedam argumenta, quae in ductibus hepaticis, eorumque toto ſyſtemate, a primis radicibus ad com-

munem truncum vsque, tum vero porro in ipſa veſicula fellea quoque, proinde in latice hepatico eam ſucceſſiue fieri ſuadent, haud pariter iam in ſanguine hepatis ipſo, et in ſyſtemate venae portarum, vt ſenſim in primis ductibus illis incipiat, in veſicula fellea demum prorſus abſoluatur. Argumenta haec mihi eſſe videntur, quod multo facilius quidem in latice hepatis, a ſanguine iam abſtracto, nec niſi a ſolo aquoſo vehiculo, aut multo ſane paucioribus gelatinoſis partibus ſtipato, coniunctio illa fieri poſſit, quam in ſanguine, vbi praeter idem vehiculum aquoſum magna quoque globulorum ſanguinis copia elementis iungendis intercedit, impeditque, quominus contingere et ſe mutuo complecti queant. Deinde nec vllum aut amaritiei veſtigium aut coloris, bili proprii, aut quoduis aliud eius indicium in ſanguine venae portarum hominis ſani apparet. Quin latex ipſe hepatis, ex ductu hepatico collectus, aqueus, vix flauus, parum amarus, fere ſalſus exploratoribus viſus eſt, cyſtica contra bilis amariſſima et abſcure virens. Quo nec in ductibus hepaticis negotium illud plane, ſed in veſicula fellea demum abſolvi, veriſimile eſt.

Non tamen ita hoc intelligendum, ac ſi nullo modo etiam in ſanguine hepatis ipſo aliquando bilis elementa congredi, bilemque efficere poſſint. Ea icteri ſpecies, quae hepatis obſtructionem pro fundamento habet, cum non in vaſis ſanguineis amplioribus, quae circulum ſanguinis abdominalis obſtructa ſuffocarent, ſed in anguſtiſſimis potius ductuum hepaticorum radicibus ipſis obſtructio ſit ponenda; bilem omnino in ſanguine etiam, dum latex ab eo abduci non poteſt, dumque elementa bilis in

eo

eo accumulantur diutiusque retinentur, generari poſſe docet. Omiſſis enim ductibus, in venam cauam tunc bilis elementa tranſeunt et in ſanguinem communem, ſatisque flauedine non modo, qua omnia tingunt, ſed ipſo amarore quoque ſe nec alcalinae, nec oleoſae, aut pinguis, ſed bilioſae, naturae eſſe demonſtrant. Bilis ergo nulla in ſani hominis ſanguine hepatico generatur, non quod principia, eam conſtituentia, non iam in eo ſanguine eſſent, neque quod liberari ab eo et ſeparari niſi peculiari ductuum ſtructura non poſſent, neque etiam quod congredi non poſſent in eo pariter atque in latice, ſed quod ſparſim nimis raraque in nimia quantitate ſanguinis diſtributa citius cum latice, quam poſſunt contingere, in ductus hepaticos et in veſiculam felleam transferuntur.

Sic duplici de cauſa perfectam bilem non eſſe laticem illum, qui de hepate prodit, apparet; primum quod mixtio elementorum in eo nondum abſoluta eſt, deinde quod nimia aquae quantitate dilutus eo vis gradu caret, qui in ſano homine ad digeſtionem requiritur; quanquam magnum diſcrimen inter varios homines in ea re locum inuenire poſſit, et ratio inſuper quoque variae variorum animalium naturae, imo ipſius aetatis, in aeſtimandis aut bilis qualitatibus, aut ipſa veſiculae felleae neceſſitate, et vſu, ſit habenda. Qui temperamenti bilioſi homines ſunt, in iis etiam ex hepate iam bilem prodire perfectam, digeſtionique aptam, quin ipſo in ſanguine forte hepatis eius nonnihil generari, abundare autem quam maxime in veſicula fellea haud negem. In pituitoſis contra, etiam quae diu in cyſtide conſeruata fuit, bilem ſaepe vix ſufficere digeſtioni, experientia medica docet. Vnde

de mirum non eſt, ſi in examinibus bilis hepaticae cyſticaeque inſignes ſaepe apud varios Autores differentiae occurrunt. De maxima parte hominum ergo et de communi eorum natura hoc dici putandum eſt, non plane de omnibus, cum bilis perfecta natura hepatico fluido negatur.

Quantum herbiuororum animalium bilem a bile carniuororum, a leonis et tigridis bile, differre oporteat, res ipſa facile indicat, cum bile ſaponacea, adipi ſoluendae apta, illis, quae nunquam adipe veſcuntur, animalibus omnino opus non eſt. Quare et hoc ipſum non eſt mirum, quod in variis eorum velut in equo nulla prorſus veſicula fellea reperiri dicatur; ſiquidem ea vis ſaponacea eaque amarities, quae in humana bile eminet, neque efficitur in eo animalium genere, neque ad digeſtiones in iis requiritur. Poſſis ergo ſane bilem vocare, quae in equo ſine cyſtidis adminiculo generatur, etiam bilem perfectam, ſed equinam quidem, quae a carniuororum et ab humana bile ſua natura differat, quae vegetabilibus macerandis apta, adipem minime ſoluat, neque cum aqua commiſceat. Dum vſus ergo et neceſſitas veſiculae felleae ad praeparationem bilis praedicatur, dumque nomen propterea bilis perfectae latici non conceditur hepatico, de ſaponacea humana bile, non de mitiori illo herbiuororum animalium hepatico ſucco, ſermonem eſſe putato. Caeterum nec omnibus, quibus negata eſt, deficit cyſtis. Negabatur elephanto, qui tamen veſicula omnino inſtructus eſt, modo vt folliculi inſtar ductui hepatiuo annexa pro veſicula fellea habita non fuerit. Aliis animalibus cyſtidis loco ductus hepaticus datur vel choledochus in ſaccum aliqua

aliqua ſui parte dilatatus, multisque cellis et ſeptis intus praeditus; quo facile patet, et veram veſiculam hunc ſacculum eſſe, cuius alteri fini hepaticus ductus immittatur, alter cyſticum edat; et indigere vi cyſtidis ſuccum hepaticum, quo in perfectam demum bilem, qualis non fuerit hactenus, conuertatur.

Denique et foetus humani ab hominis adulti natura et oeconomia mire differt. Mitis in eo et inſipidus latex hepaticus non modo, ſed ipſa cyſtica bilis quoque, inuenitur; vnde, neſcio quo errore ductus, *Hallerus*, quamuis inſipidus hepatis ſuccus in adulto, cyſtica contra bilis amariſſima ſit, tamen illum non minus veram bilem quam cyſticam eſſe cenſuit; quum cyſtica ipſa in foetu ſine amarore eſſet. Foetus ex ſanguine materno nutritur, nec officina huic digeſtionis ergo, nec bile ſaponacea opus eſt; nec poſſet etiam vera bilis in foetu ob alcaleſcentium principiorum defectum praeparari; cum foeces inteſtinorum in eo non putreſcant. Nec cyſtica ergo, neque hepatica in foetu quae bilis dicitur, vera bilis eſt; nec aliud niſi hoc abſurdum bilis vocandae argumentum datur, quod in eodem ſcilicet eam inuenias vaſe, in quo in adulto vera bilis inueniri ſoleat. Non recte ergo, quod et cyſticus ſuccus in foetu amarus non ſit, hepaticum ideo in adulto laticem, etiamſi amaritie careat, tamen veram bilem eſſe concluditur.

Hominis ergo, eiusque adulti, et cuius communis hominum ac ſolita natura ſit bilem intelligo, quam nonniſi in cyſtide perfectam, rite miſtam et ſatis meram inveniri dico, quo munere bilis functa adipem ſoluere et

cum aqua miſcere poſſit; quamque non hepatis ſolo opere ſed veſiculae imprimis effectu praeparari et perfici arbitror; non herbiuororum animalium bilem, quae diuerſi generis bilis eſt, nec ſuccum cyſticum in foetu, qui bilis virtute caret, nec hominum quorundam calidorum bilem, quae rariſſimis forte exemplis praematura ex hepate iam prodit.

De Secretionibus generatim.

Caeterum hoc ſoli bilis praeparationi proprium eſſe videtur, vt diuerſa principia, ex diuerſis viſceribus petita, miſceantur deinde, et vniantur in nouam materiem. Quae reliqua fluida peculiaria ex ſanguine naſcuntur, ſimpliciori modo et ſenſu veriori ſecerni inde videntur. Sua natura ſanguinem, dum per vaſa agitur, et ipſa quaſi ſanguificatione eadem, qua componebatur, continuata, etiam rurſum denique diſſolui, veriſimile eſt, in has ſuas partes, ex quibus conſtat, et quas ex communi ſanguinis maſſa prouenire videmus. Tum vero, quaecunque hae partes ſint ſanguinis reſoluti, aut ſecedentes ex eo, ſero continuo committuntur eique inhaerent, nec niſi vna cum eo in organis ſecretoriis a ſanguine abſtrahuntur. Vt diuerſum omnino paulisper in diuerſis corporis regionibus ſerum ſit, quod cum ſanguine vehitur, quodque in organa introducitur ſecretoria Reliquum negotii, niſi in omnibus, in quibusdam tamen, ſecretionibus, aut eo receptaculo effici mihi videtur, in quo ſecretum fluidum collectum moratur, aut ipſo huiuscemodi receptaculi defectu. Sic multo minus a ſudore vrinam differre probabile eſt, ſiquidem omnino differt, quae ex renibus ad veſicam vrinariam defertur, quam quae diu in hac morata tum demum

mum excernitur. Nec ſaliuam a muco differre credo, ſi pariter illa in cryptas depoſita diu moraretur, antequam ad vſum ſuppeditaretur.

Haud tamen negauerim eſſe, niſi ſingulis, nonnullis tamen forte fluidorum diuerſorum ſecretionibus ſingularia etiam ac propria adminicula quaedam praeter ea, quae omnibus communia eſſe dixi, quibus, ſi quid differentiae alicui ſecreto liquori a caeteris eſt, quod nec a diuerſitate ſeri, in organum introducti, neque ab inſpiſſatione in receptaculis, aut celeriori ſine mora excretione explicari poſſit, id efficiatur. Hoc certum atque perſuaſum habeo, primarias omnium ſecretionum cauſas in diverſitate ſeri ſanguinis, in organum ſecretorium inducti, et in eo apparatu poſitas eſſe, quo vel aliquandiu fluidum ſecretum incluſum conſeruatur, vel continuo ad vſum ad hibetur, excerniturue; deinde in plurimis etiam ſecretionibus has cauſas ad abſoluendum perficiendumque negotium ſufficere; paucis, vel vni ſeminis ſecretioni praeter eas communes cauſas peculiaria quaedam forte contingere, hactenus ignota, quemadmodum bilificationi id ſingulare eſſe vidimus, vt diuerſi generis elementa, in liene et omento ante praeparata, miſta dein in hepatis ductibus, bilem efficiant; caeterum nusquam ductuum ſecretoriorum conditionem aut rationem diſtributionis vaſorum eo quidquam conferre, vt haec potius quam aliud in aliquo viſcere fluidum ſecernatur.

Eoque magis miratus ſum, etiam nuperrime Viros Celeberrimos eam ſupponere viſos eſſe hypotheſin, qua vniuerſum bilificationis negotium ab angulis maxime

vaſo-

vaſorum hepatis penderet. Mihi ſane vel ſolum illud icteri ab obſtructione hepatis argumentum opinionem eam deſtruere videtur. Si anguli vaſorum in hepate, ſi vlla ſecretoriorum ductuum conditio cauſa eſſet vel generandae vel eliciendae ex ſanguine, aut ſecernendae, bilis, adeo, vt niſi peculiari horum ductuum artificio et interuentu nulla in corpore noſtro bilis oriri poſſit; nulla ſane oriretur, cum ductus iſti vaſaque obſtructa ſunt. Iam contra omnia potius bile inundari vides, his vaſis obſtructis; prope vt maiorem nunc quam in ſtatu naturali eius copiam produci credas. Vniuerſus ſanguis oppletus eſt bile; albuginea oculorum cutis, cellulosa, flauedine tinguntur, et cum vrina bilis mingitur. Quid aliud ergo hoc indicat, niſi ſua natura bilem ſuisque viribus ex ſanguine venae portarum progigni absque vlla ductuum hepaticorum adminiculo; ſuſcipi tamen his ductibus vna cum ſero et ſeparari a cruore, quod ni fiat, generari tamen et manere in ſanguine.

Atque ne ad ſimplicem ſuſceptionem et ſeparationem quidem, nedum ad productionem bilioſi ſeri quidquam praecipue poſſe videntur vaſa hepatica; vt facilius ſaltim, aut promtius, hepaticis quam aliorum viſcerum ductibus, ſerum bilioſum ſuſciperetur. Renales ductus, hepaticis obſtructis, aeque ac iſti laticem bilioſum ſuſcipiunt, et a cruore ſeparant, et vaſa quaecunque ſeroſa in albuginea, in cute vniuerſa, in omni celluloſa cruorem modo anguſtia ſua excludant, haud minus quam ductus hepatici laticem bilioſum ſuſcipiunt ſeparantque, quem, qualis in cute et albuginea haeret, ſi committerent veſiculae felleae, eandemne putes bilem inde enaturam, quae

ex

ex latice in ea hepatico enaſcitur? perfectior ſiquidem amarore et flauedine bilis eſt, quae per omnis generis vaſa ſeroſa ictericorum circumuehitur, quam quae naturali conditione ex ductibus colligitur hepaticis, cyſtidem nondum ingreſſa.

Proinde ſola primum ſimplex anguſtia ductuum ſecretoriorum hepatis, omnibus communis et ſeroſis vaſis et ductibus ſecretoriis viſcerum reliquorum, aliquid ad bilificationis negotium certo confert. Quaecunque ceterae horum ductuum aut vaſorum conditiones fuerint, anguli, directiones, flexiones, denſitates, aſpergilla, penicilla, aut ſtellae, vel ipſius anguſtiae varii et ſucceſſiui gradus, nil porro conferre videntur. Deinde et id quidem, quod illa ſimplex anguſtia confert, parum eſt, nec niſi quod quaelibet alia vaſa, aut ductus, minora, quam vt ſanguinem admittant, pariter conferrent; nimirum vt ſerum ſuſcipiant, excluſo cruore. Vehementer ergo illi mihi errare videntur, qui cauſam, cur bilis potius, quam aliud fluidum in hepate ſecernatur, in conditionibus ductuum ponendo, aptitudinem non modo his ductibus peculiarem excerpendi bilem, ſed vim quoque adſcribunt quaſi extrahendi eam aut eliciendi ex ſanguine; ſiquidem cum bilem ſponte ſubortam, abſtrahendam modo a ſanguine, dederis; et nihil praeter anguſtiam, quod opus ſit, ſupereſt, et nulla in ductibus cauſa erit, cur tantum in hepate, non pariter in renibus, bilis ſecernatur.

Ex ipſa huius diſſertationis parte priori videas, quam alienus ab eo ſim, vt vlli peculiariter ſtructae parti ſuam temere negem vtilitatem. Quare etiam varios illos

 diſtri-

diſtributionis modos, in variis viſceribus obſeruatos, inutiles non eſſe perſuaſus ſum. Poſſunt alibi eo conferre, vt minime, quale ſerum a ſanguine abſtractum eſt, id mora indolem ſuam mutet, alibi vt mutet, eadem ratione, qua in receptaculis mutanda eſt indoles. Poſſunt in hepate forte commoditatem aliquam praeſtare, quo facilius citiusque alcaleſcentia principia cum oleoſis ſe coniungant. Neutiquam autem vel eliciendis ſecernendisue his principiis ex ſanguine inſeruire, vel efficere illam coniunctionem, quae propriis elementorum viribus abſoluitur, vel quidquam ad reſumendas aliquas peculiariter ſeri partes, aliis excluſis, contribuere, vel vllo modo fundamentum ſecretionum eſſe videntur.

De Bilis ex Veſicula fellea excretione.

Vt multa in corpore noſtro fiunt, quorum cauſas ignoramus, eaque inter, quae longe explicatu facillima primo intuitu videntur; nihil fere magis pro cognito compertoque haberi ſolet, quam quod cibis diſtento ventriculo veſicula fellea comprimatur, bilis expellatur. Quamuis experimentulum illud, in deſcriptione veſiculae felleae humanae enarratum, quo preſſa veſicula ne vmbra quidem intumeſcentiae ad ductum cyſticum vsque perduci poterat, in pluribus non repetierim corporibus (rogo autem, vt repetant, inquirantque minutius, quousque impulſus cogi poſſit, quibus cadauera non modo, ſed et hepata praeparata frequenter ad manus ſunt); trabeculae tamen, quibus cyſticus ductus repletus eſt, mihi fere perſuadent, fore, vt, quaecunque etiam conditio plicarum fuerit, vix vnquam tamen, niſi perquam difficile forte, bilis veſiculae

preſſu-

preſſu per ductum cyſticum ad choledochum vsque poſſit vrgeri. Facile vides quoque, id ſi fieri poſſet, quouis leuiore ventriculi motu inordinato, aut repletione nimia periculum fore, ne ſimul omnis bilis penus excutiatur, haud breui facilique negotio reſtaurandus; quod ipſum proinde ne fiat, aut fieri poſſit, cautum potius prouide eſſe plicis veſiculae et cyſtici ductus trabeculis.

Non eo, vt explicem difficile hoc phaenomenon; quod certe altioris indaginis eſt, ſed quo ab errore ad rectam veritatis viam reducam alios, haec dixerim. Hoc tamen affirmare non dubito: nulla preſſione externa bilis excretionem fieri; fieri potius ſimili modo, ac ſaliua in ore ſtimulantibus cibis concitatur, vel aſpectu aut ſola imaginatione talium ciborum; quo pariter et ſuccus gaſtricus in ventriculo et vndique in viis cibariis liquores eliciuntur, quo porro muci profluxus in naribus, et in aſpera arteria introducto ſtimulante puluere excitatur; quo denique in vniuerſo corpore humano, aut cuiuscunque generis animali, contactu acrium cum partibus viuis ſentientibusque humores prouocantur. Singulari irritatione ergo, primo inteſtinis cibis recentibus appetitisque excitata, dein propagata per choledochum ductum, et per hepaticum non minus quam per cyſticum in veſiculam felleam vsque, elici potius quam expelli bilem. Contractis ſolidis ductuum veſiculaeque partibus quibusuis, plicas quoque trabeculasque contrahi, minoresque fieri, quo lumina maiora patentioraque fiant alibi, alibi contractis parietibus cauitates arctentur, et bilis paulatim vrgeatur, paulatim transmittatur. Haec hactenus vix dubioſa mihi ſunt. Qua ratione haec lenta mollisque et placida irrita-

 tio,

tio, inteſtinorum tractui eiusque appenſis partibus propria, efficiatur, quomodo differat a violenta irritatione muſculorum, cur acribus non modo excitetur, ſed varia pro varia corporis diſpoſitione ac conditione ciborum indole quoque, potiſſimum ſapore et odore diſcernenda, id omne ignoratur.

De Contentis inteſtinorum bilisque exhalantis in ea ingreſſu et vſu.

Quum tanti vſus tantaeque dignitatis plicas veſiculae trabeculasque cyſtici ductus et cetera impedimenta bilis eſſe viderem in conficienda praeparandaque bile, tantaeque efficaciae in incarceranda; venit in mentem dubium: annon quae per membranas veſiculae tranſpirare parteſque circumiacentes tingere ſolet, ea pars bilis quoque vſum ſuum aliquem forte praeſtet? vt non tam vitio tunicarum veſiculae, et fortuito, haec perſpiratio, quam potius ex praemeditato conſilio naturae, fieret. Inquiſiui in eam rem. Ligatis per interualla inteſtinis, quo et ſedes in iis notarem, vel ipſi veſiculae ſubiectas, vel magis minusue ab ea remotas, et cauerem ſimul, ne foeces ex aliis in alias ſedes dilaberentur, inteſtina ſolui a meſenterio, extenſaque ſuper tabula aperui, et examinaui foeces. Quae hac via repererim, enarrabo.

Vt nunquam non tinctas inueniri conſtat flauedine partes, veſiculae contiguas et vicinas; ſic hoc quoque in corpore (*) vbi quaeuis minutius perquiſiui, muſculos primum

(*) Erat iuuenis ſani cadauer, viginti circiter annorum, quatuor aut quinque poſt prandium horas algore necati.

primum abdominis prope marginem coſtarum, et peritonaeum obtegens, deinde omenti ſatis magnam latamque partem, veſiculae ſubiectam, denique et inteſtini tenuis inſignem, quindecim pollices longam, complicatam et conuolutam partem bile perfuſam reperi. Haec ipſa ea erat, qua et finis ieiuni et ilei principium et medii inter haec vtriusque inteſtini limites comprehendebantur. In plures gyros eadem conuoluta ſub hepar et ſub veſiculam hac ratione intruſa haerebat, vt quaſi nidulari in ea veſicula videretur.

Negant, recte inteſtina tenuia a veteribus praeter duodenum, in ieiunum et ileum diuiſa eſſe, *Winslovius* et *Hallerus*. Id perperam ſane. Nam et colore et figura et magnitudine et fabrica adeo ieiunum ab ileo differt, vt primum intuenti maxima continuo differentia pateat. Ieiunum extus totum aequale eſt, lateribus vbique parallelis. Ileum ſectionibus transuerſis per interualla parua in bullas diuiſum et criſpum. Magis id tamen in parte ſui poſteriori, coloque propiori, vbi illud ſatis iam huic ſimile eſt. Planum praeterea et collapſum, quaſi vacuum eſſet, ieiunum eſt, vnde hoc nomen ſortitum; ileum teres, et in illas, quas dixi bullas inflatum. Tenuius quoque ieiunum, ileum craſſius eſt. Illud ſubrubro colore gaudet, hoc pallidum habet et fere album. Denique interior ſtructura valdopere in vtroque inteſtino differt, et alia in ieiuno ratione, alia in ileo, vt inferius dicam, feces continentur. Si non vna linea circulari limites inter ieiunum et ileum deſcribuntur, ſi in aliquo ſpatio potius ſenſim ieiunum in ileum mutatur; ſenſim ieiunum dicas in ileum abire, non, nullum propterea ieiunum eſ-

 ſe,

ſe, ab ileo diuerſum, aut ileum diuerſum a ieiuno. Datur nimirum ſpatium in vtriusque inteſtini confinio, ſesquialterius quaſi longitudine pedis. In eo ſenſim proprietates ieiuni euaneſcunt, naſcuntur ſenſim et augentur ilei characteres; vt in hoc ſpatio quidem, niſi in duas id totum diuidere velis partes aequales, dubius ſis quo proprie finem inter vtrumque inteſtinum ponas. Caeterum totum citra hoc ſpatium ieiunum, totumque vltra ileum, vtriusque longe pars maxima, ſui ſatis ſimilis eſt. Inde nunc *Hallerus* concludit, inteſtina tenuia tria anatomicos, naturam vnum, feciſſe; quod certe non fecit.

Haec ipſa pars ergo inteſtini, qua ieiunum ſenſim in ileum abit, finis ieiuni principiumque ilei, conuoluta et complicata ſub hepate et ſub veſicula fellea haerebat, tota bile imbuta, flauedine et virore inſignis. Poſtquam exempta inteſtina aperui, ſic eorum inueni contenta. Prima pars quarta ieiuni maſſam tenuit, liquidi pultis conſiſtentia donatam; vt aliquam ſpiſſitudinem, parum tamen tenacitatis, qua ſe muci inſtar extendi pateretur, haberet. Haec tanta non erat copia, qua impleri inteſtinum poſſet, quin collapſum id potius, vt ſupra dictum, et vacuum ergo, ſi flatu extenderetur, aliqua ſui parte erat. Neque tamen plus eius alibi forte congeſtum erat, quo tanto magis deficeret alibi, vt fieri oportere crederes, ſed aequabiliter potius per omnem hanc partem inteſtini diſtributa maſſa erat. Nimirum circumquaque parietibus adhaeret inteſtini; interior pars huius, axi propior, vacua eſt; eaque adhaeret ratione, vt quamuis pendulum inteſtinum teneatur, aut varie iactetur, tamen nec defluat tenuis pultacea maſſa, nec vsquam delapſa axin canalis occupet.

cupet. Atque quod maxime mirum, non largiter modo, ſed ita quoque aequis partibus diſtributa ſuper parietes eſt, vt maxima cum cura et diligentia illita iis parietibus eſſe videretur. In eoque ſtatu, inteſtinis quamuis varie motis, tamen manet. Caeterum ea copia eſt illita, vt ipſas acies valuularum conniuentium, quae duarum facile linearum latitudine ſunt, vix, ac ne vix quidem, eminere paſſim ſinat, paſſim omnino obtegat.

Cauſa nempe pertinacis huius adhaeſionis chymi ad inteſtini parietes, qua haud magna fiſtula in medio inteſtino pendulo caua manet, valuulae ſunt conniuentes, quae paruis, duarum vix linearum, interuallis a ſe mutuo diſſitae, caeterum erectae, in chymum productae, attractione eum inter ſe tenent, ſuſtentantque. In qua re, cum vſum ſimul ſpectes, et finem naturae, (qui, vt ex quavis, vel minima, chymi particula chylus eliciatur,) vix poſſe fieri arbitror, quin aliquam ſpeciem voluptatis ex tam mirabilis artificii conſideratione capias.

Haec chymi portio, in prima parte quarta ieiuni contenta, cinereo erat colore, vix quidquam ad flauedinem vergente. Videntur omnino aliquid flauedinis, ſed parum, habere, quae in altera et in tertia ieiuni parte quarta portiones continentur. Tum manifeſto tenuior, fluidiorque eatenus, in his partibus maſſa eſt. Pendulum enim inteſtinum cum tenetur, ſenſim defluit; quod in prima parte ieiuni nequaquam obſeruabatur. Et copia quoque aucta eadem nunc eſt, vt minus planum inteſtinum exterius, quam in parte prima videatur. Sed tenuitas illa, quam tribui huic maſſae inteſtinalis portioni,

non

non tam aqueae indolis, quam potius mucoſae eſt, neque omnino ab admiſta aqua, ſed potius a tenui muco admiſto, orta eſſe videtur. Dum defluit ab inteſtini parietibus, lente defluit, et dum agitur, in mucoſa quaſi fila ſe extendi patitur.

Nec magis fere in vltima quae continetur ieiuni quarta parte maſſa inteſtinalis inſignis eſt flauedine. Ad aqueum turbide pellucidum impurum colorem, aliqua flavedine ſubtinctum, vergit. Tum manifeſto et fluidior autem in hac parte canalis maſſa eſt, et magis accumulata, vt fere cylindrica iam inteſtini figura ſit. Illaque fluiditas nunc quidem ab admixtis aquoſis humoribus pendet; ſiquidem facile non modo defluit, ſed glomera quoque muci albi diſtincta, magnitudine piſi, minoraque, fovet, in fluidiori et aquoſo pellucidoque vehiculo quaſi ſoluta; quo copia maiori aquae adfuſa priorem mucum diviſum et attenuatum eſſe apparet. Sic primum hic inaequalis et heterogenea maſſa obſeruatur, quae in prioribus ieiuni partibus vbique aequalis et ſibi ſimilis erat.

Circa principium ilei tandem et in ea ipſa parte inteſtini, quae veſiculae felleae ſubiecta fuerat, quae limites dubios inter ieiunum et ileum complectitur, vera et manifeſta flauedo in contenta maſſa inteſtinali apparuit. Eaque inde adeo nunc per totum ileum et per craſſa inteſtina continuat, vt nusquam ſigna certa biiis porro deficiant. Intenſior quippe in fuſcum potius primo, deinde ſenſim in virideſcentem ad medium ilei, et ad finem huius, vbi iam forma et ſpecies foecum aluinarum erat, in perfecte viridem colorem mutabatur. In craſſis denuo ad

fuſcum

ſuſcum et flauum, ſolitum ſuum notumque colorem, foeces redibant.

Caeterum vt fluidam maſſam in vltima parte ieiuni et inaequabilem glomeribus paſſim intermixtis mucoſis eſſe dixi, ſic et magis heterogenea ſuique diſſimilis in hoc vtriusque inteſtini confinio et in principio ilei fuit reliquiis quibusdam ciborum, crambes et piſorum fruſtulis, tunicisque piſorum, quas nusquam niſi in hac primum ſede et in prima ilei parte reperi. Eaque nunc copia erat contentorum, vt maxime extenſum inteſtinum non modo eſſet, ſed ipſa maſſa quoque, inteſtino quamprimum inciſo, eruperit.

Eiusdem fere indolis, fluida, inaequabilis muci particulis intermixtis, et reliquiis ciborum, in prima et in ſecunda parte quarta ilei maſſa inteſtinalis inuenta eſt; modo vt ſenſim tamen et mucoſae moleculae copia minuerentur, et heterogeneae ſimul ciborum particulae magis magisque diſparerent, eovsque, vt vix quidquam vtrorumque in tertia et in vltima ilei parte quarta inueniretur. Videntur ergo cum glomera muci, quae in vltima maxime parte ieiuni, cryptis ſuis excuſſa, maſſae adduntur, tum ipſae reliquiae ciborum noua accedente bile partim, partim copioſis ſimul additis fluidis, in hac prima et in ſequentibus ilei partibus iterum reſolui et in aequabilem denuo maſſam inteſtinalem redigi, diuerſam a priori, in ieiuno hactenus contenta, et primum hinc in foecum naturam vergentem.

In tertia et quarta parte ilei praeterquam quod reſolutis muci glomeribus ſubactisque reliquiis ciborum aequalis denuo maſſa et ſui ſimilis facta ſit, colore, vt monui, ex flauo virideſcente, craſſior eadem quoque manifeſto, minus in tertia parte, magis in quarta, obſeruatur. Haec incraſſatio abſorbtis per totum ileum fluidis, vna procul dubio cum iis, quae vtilia adhucdum ad nutritionem in illis continentur, eo ſenſim vsque ſuccedit, vt in caeco et ſequenti colo iam ſiccae aliquatenus in hoc ſano et iuuenili corpore, nec quidquam ab aluinis diſcrepantes, foeces inteſtinales apparerent.

Tum hoc quoque de ileo toto notabile, vt cuius ne bullula quidem hactenus in ieiuno eiusque et ilei confinio, aëris apparuerit, is tanta copia nunc in ileo inveniatur, vt totum hoc inteſtinum, magis tamen in partibus ſui poſterioribus, aëre partim, partimque foecibus, promiſcue ſit repletum et inflatum. Eademque aëris copia per omnem inde craſſorum inteſtinorum tractum diſtributa eſt. Et in ipſa externa facie et in interiori ſtructura haec inteſtina, ileum puta et colon vniuerſum, aliquid habere videntur, quod aut continendo aëri peculiariter aptum ſit, aut omnino a perpetuo contento aëre ſit affectum. Nam quod paruis interuallis quaſi transuerſim inciſum eſſe dixi ileum atque in bullas adeo confluentes diuiſum, quo ſe hoc ab ieiuno nempe diſtingueret, et quae conditio eadem, magisque accurate, caeco porro et colo quoque inteſtino eſt, ea ſane vtrumque, et aptum inteſtinum ad recipiendum fouendumque aërem efficit, et continuo aërem in eo contentum, productamque adeo hanc ſtructuram ab aëre, indicare videtur.

Vt

Vt planum nunc et vbique aequale, lateribus aeque vbique diſtantibus, et ſimile vbique ſibi ieiunum eſt, vtque ne bullam quidem aëris in ſe continet, ita diuerſam longe rationem continendi maſſam inteſtinalem hic aër ſubortus in ileo et in craſſis inteſtinis efficit. Quae maſſa enim parietibus inteſtini aequabiliter illita in ieiuno erat ea ratione, vt haud facile, quouis inteſtinum moueas, dilaberetur, ea incertis ſedibus et mobilis in ileo et in craſſis, diſtento aëre inteſtino, prout hoc varie mouetur, huc illuc prouoluitur, vacuo alibi faecibus inteſtino aëreque diſtento, repleto foecibus alibi, expulſo aëre, denique et conſtricto, aëre pariter et foecibus expulſis, alibi inteſtino exiſtente. Sic foeces ergo inteſtinales, quae in ileo eſſe incipiunt, in ileo et colo, ſic chymus, qui ad ileum vsque permanet, in ieiuno continetur. Caeterum haec omnia, quae de ileo et colo dixi, magis tamen in fine ilei quam in principio eius, et magis in colo quam in ileo, ſe ita habent.

In craſſis inteſtinis foeces vix porro mutantur, niſi vt magis magisque abſorbtis fluidioribus craſſiora primum, deinde et ſicciora et duriora in ſtatu ſano et naturali euadant. In ſolo recto tamen, quod plicis transverſalibus caret, vt facile arctiori conſtrictione in ileo, imprimis in colo, aër ſecludi in aliis ab aliis ſedibus poterat, id minime fieri poſſe videtur; quin totum potius rectum vna aut inflatum ſit, aut aequali ratione expulſo aëre collapſum.

Haec ſunt, quae de veſtigiis maxime bilis in reliquiis ciborum, tum et de caeteris eorum conditionibus

 hac

hac ſimplice inſpectione inuenire potui. Non gratiſſimum id ſtudium inquirendi foeces inteſtinales fuit. At dignitas tamen rei, quod ad hominem id ipſum, quod ad me, et ad quoslibet, qui cari mihi ſunt, hoc idem ingratum pertineret, et neceſſario cum humana natura coniunctum eſſet, omne facile genus foetoris et quicquid caeterum nauſeoſi aut ſordidi in ea inquiſitione eſt, vincere me docuit. Vti nunc chymus ad eam ſedem vsque, qua veſiculae felleae inteſtinum ſubiectum totum bile perfuſum eſt, cinereo maxime colore gaudet, et inde primum praeditum eſſe inſigni flauedine incipit; vt chymus in duodeno quoque et circa ductus biliferi inſertionem obſcure fusco colore notatus eſt; probabile omnino eſſe videtur: *miſceri bilem, quae per ductum choledochum ad duodenum tranſit, ea ratione cum chymo, vt deleta propria natura, exutoque colore, in chylum ipſa producendum cum chymi partibus tranſeat, cinereumque et albidum in noua materia loco flaui colorem efficiat. Tum nouam vero portionem bilis circa ieiuni fines accedere exhalando de veſicula fellea, penetrandoque in hac ſede in inteſtinum et in inteſtini contenta; quae, diuerſa forte a bile choledochi, certe non ita cum foecibus, vt illa cum chymo, miſcetur; dum proprium ſuum colorem ad anum vsque conſeruat veraque adeo bilis permanet.*

Ergo ſingulari ſtudio natura bilem in veſicula fellea a reditu in choledochum arcere videtur plicarum et trabecularum adminiculo, etiam vt ne eam partem omnem quidem, quae ſuperflua eſt, quam extenſa veſicula vltro capere nequit, redire ſinat. Qui latex nimirum continuo ab hepate in veſiculam aduenit, eius et conti-

continuo, eaque maior, portio aquoſa venis abſorbentibus rurſus abſtrahitur; minor eaque acrior, viridiſſimo colore nitens, portio reſtat. Iam ne id quidem, quod abſumta mole inerti aquoſa acre ſupereſt, quantum ſupereſt, per cyſticum redit, quin accumulata tamen in veſicula bilis hanc impleat extendatque et per tunicas eius tranſſudet. Quae nunc tandem de ipſa ſuperflua parte, minima portio craſſior ſupereſt, ea quidem ſenſim, prout huius etiam copia in cyſtide augetur, reptando per cyſticum ductum ad choledochum peruenit.

Procul dubio tenuior acriorque et volatilior ea pars bilis eſt, quae exhalat, craſſior temperatiorque et magis reſpectu illius principio oleoſo edulcorata, quae penetrare per tunicas non poteſt, quae citra poros reſtat. Sic noua ſeparatio quaſi hic fieri videtur ſubtilioris acriorisque bilis, quae auolat et in partes circumiacentes penetrat, a mitiori et craſſiori, quae pro duodeno reſeruatur. At ſane quicquid huius rei efficitur, id plicis veſiculae aut trabeculis ductus cyſtici maximam partem debetur. Nam niſi impeditus et grauatus bili per illas anguſtias exitus eſſet; ſimulac repleri veſicula bile et extendi inciperet, ad duodenum illa defflueret potius per vias apertas, quam ſe exprimi pateretur per poros membranarum.

Mitior ergo bilis cyſtica, quae ſimul et craſſior, excepta dilutaque latice hepatico ad duodenum transfertur, chymoque admiſcetur. Eademque et aptior nunc eſſe videtur, vt coniuncta cum oleoſis et aquoſis chymi particulis, depoſita bilis natura et colore, in chyli mixtionem

ipſa tranſeat, cinereumque potius quam flauum chymum ieiuni efficiat. Acrior ſubtiliorque pars bilis contentis accedit inteſtinorum, vbi extractis iam fere vtilibus nutritiis ſuccis in faeces paulatim transmutari incipiunt. Ibi partim reliquias, quae forte adhuc dantur ciborum reſoluere, mucum cum tenuioribus fluidis copioſis, quae tum excernuntur, diluere, omnia in vnam nouam maſſam aequabilem redigere, partim progreſſum huius maſſae per colum promouere ſtimulando, et ad excretionem aluinam ſollicitare, denique et abſorbta partim reduci videtur inter caetera hinc petenda alcalinae indolis principia ad venam portarum, augereque hanc alteram partem materiae nouae producendae bilis.

Deinde, vt ſolemus, nec perperam forte, quicquid aut boni aut vtilis ex aliquo naturae opere fieri poſſe intelligimus, id fini adſcribere et praemeditato conſilio naturae: ſic ego quoque, cum haud parua portio omenti bile perfuſa plerumque reperitur, hoc eo fieri ſimiliter exiſtimo, vt bile tenui ſoluta adeps facilius copioſiusque abſorbta venis, hepati tradatur, vberiorique ergo nouae bilis prouentui rurſum inſeruiat. Sic duplici ratione haec acrior volatiliorque pars bilis, quae, minus edulcorata, minus apta eſſe videtur ad chylificationem, praeterquam quod vſum ſuum in foecibus inteſtinorum formandis educendisque praeſtat, ad confectionem bilis quoque contribuit, augendo ſui acceſſu acria alcalina principia, et excitando ſolutione adipis epiploicae maiorem copiam oleoſorum.

DE-

DESCRIPTIONES PLANTARVM SIBIRIAE PECVLIARIVM,

Auctore

P. S. PALLAS.

Celebratus Itinere et Flora Sibiriae *Gmelinus* fuit primus auctor tritae inter Botanicos opinionis, de limitibus Florae aſiaticae borealioris ad Ieniſeam fluuium conſtituendis. Scilicet unius anni fugitiuo itinere ab Irti fluuio uſque in Transbaikalenſes regiones delatus, vix libata montium Altaicorum Flora, ad Ieniſeam vtique inſignem in vegetabili regno mutationem obſeruaſſe ſibi viſus eſt. Et vere, licet Uralenſe iugum, inter Ruſſiam et Sibiriam extenſum, transgreſſo aliquae iam plantae Sibiriae peculiares occurrant, et permultae diſpareant europeae (etiam arbores et frutices), inde tamen reliquo ſolitae per plana Sibiriae tractu viae, inter plantas pleraſque vulgares borealis Europae, pratenſes et ſylueſtres, parum inſoliti apparet. Ratio autem, quae circa Ieniſeam maiorem inſolitarum plantarum numerum in conſpectum obſeruatoris ſubito producit, vicinia eſt alpeſtris iugi planitiem ibi ſenſim arctantis. Sed quisquis circa Altaicas primum alpes diligentius plantis operam dederit, illi perparum

rum noui regio ad Ieniſeam offeret. Sunt nempe alpigegenae Sibiriae plantae quae *Gmelino* noſtro impoſuerunt, quas inde ab Irti fluuio, vbicunque propius ad alpeſtrem tractum acceſſeris, plenis manibus obuiam ſpargit natura, quaeque tantum abeſt ut regiones vltra Ieniſeam ſine discrimine praeferant, ut potius in ſyluis depreſſis, ſecundum Tunguſcae et Angarae tractum, plane deſint, vulgaribus denuo Europae plantis luxuriantibus.

Mihi noua et aſiatica Naturae facies non prius ante oculos conſtitit, quam vbi Baicalem lacum transgresſus, in medium tractum alpeſtrem, montibus praeruptis, apricis conuallibus, rupibus altiſſimis et ſaxoſis, atque calidis inter rupes planitiebus variatum, me immiſi; maxime vero poſtquam vlterius Iugum, quod Dauuriam ſic dictam a prouincia Udinenſi dirimit, tranſieram. Ibi vulgata Flora borealis mundi regnare deſinit, praeualentque orientales frutices et herbae, Robiniae, Betulae antea non viſae, Rhododendra, Pyrus Prunusque ſibiricae, Ribes et Spireae variae, numeroſae Pediculares, Aſtragali, praeſertim verticillaribus foliolis, Phacae, Irides, Lilia, Staticae, Cymbaria et Peganum dauuricae, Potentillae plures, Swertiae, Polygona, Serratulae, Pteris pedata, Lycopodia hiſce regionibus vel plane peculiares ſpecies, vel antea nonniſi ſporadicae, aliquae etiam cum ultimo orientalis Sibiriae angulo, imo cum America communes, imperium capesſunt. Sin verſus ambientia haſce regiones niualia juga adſcendas, tum vero plantas gelidiſſimae ſub Arcto plagae, vltimaeque Kamtſchatcae, vt Claytoniam, Gymnandram, Dryades, Cortuſam, Mitellam, Gentianam pallentem, Rhododendron chryſanthum, Pediculares inſolitas inuenias.

nias. Neque minori delectamento ſunt ipſius Altaici iugi diuitiae botanicae, licet non omnino Dauuricis comparabiles, et quae in planitiem ibi vix deſcendunt.

Multas, poſt *Gmelini* labores, incognitas plantarum ſpecies in Sibiriae memoratis regionibus collegi, atque haud exiguum illarum numerum in *Appendicibus* ad *ſecundum tertiumque Tomum Itinerarii*, additis iconibus, deſcripſi. Complures etiam, ex Altaicis, in *Nouis Commentariis Academiae* deſcripſit Clar. *Laxmann*, qui per plures annos in vicinia montium Altaicorum Botanicae operam dederat. Nihilominus multas etiamnum poſteris per Sibiriam vaſtiſſimam obſeruandas ſupereſſe, probant Herbaria a diligentiſſimis Botanophilis Dno *Patrin* ICto Lugdunenſi et Academiae noſtrae Correſp. et Dno. *Petro Schangin*, Chirurgo Ophioritano qui coniunctim ſumma cacumina Altaica perluſtrarunt, ad nos transmiſſa, in quibus ſpecies complures nouas, easque ſtatura et pulchritudine inſignes, quae etiam *Laxmanno* non occurrerant, ſumma cum voluptate inueni. Harum nouitate praeſertim excitatus, proprium per Sibiriam collectum Herbarium denuo pertractare conſtitui, in quo multas ſpecies intactas reliqueram, poſterioribus curis enucleandas; dum euidentiores, circa quas, librorum apparatu in itinere deſtituto, nullum obuerſabatur dubium, ſolas Itinerario deſtinaſſem. Numerus ſatis inſignis prodiit reſiduarum, quas in peruolutis Botanicorum libris non inuenio, adeoque illuſtratione dignas cenſeo, quo ſenſim Florae Sibiricae compleatur codex a *Gmelino* conditus. Per Faſciculos itaque prodibunt ſenſim, quorum hic primum ſuppedito, iis maxime compoſitum ſpeciebus, quas in Herbariis Altaicis nuper

 acceptis

acceptis nouas inueni. Succedent dein Dauuricae variae et orientalis Sibiriae plantae, Botanicis exteris nondum notae ideo maxime, quod e ſeminibus haud facile educantur, adeoque hortis familiares reddi nondum potuerunt, quamuis plurium ſemina, etiam a me ipſo, paſſim communicata fuerunt.

Primus hic *Plantarum Sibiricarum Faſciculus* continebit: Siſon *crinitum*, Peucedanum *reticulum*; Leonticen *altaicam*, Aſphodelum *altaicum*; Aquilegiam *viridiflorum*; Nepetam *annuam*, Leonurum *alpinum*; Aſtragalum *deflexum*, et *Fumariam* Schangini; quorum iam ſequantur deſcriptiones.

I.

Siſon crinitum.

Tab. VII.

Hanc elegantiſſimam Umbellatam in niualibus montium Altaicorum iugis, viginti circiter ſtadia a fortalitio et riuo Tigerek verſus occidentem, obſeruarunt Amic. *Patrin* et Chirurgus *Schangin*, a quibus ſemina et ſiccatas plantas copioſe accepi. Prior etiam deſcriptionem optimam viuae plantae miſit, et praeter indicatum locum nusquam obſeruatam fuiſſe monet; quemadmodum neque mihi vel amanuenſibus meis, dum iſtas regiones peragrabam, neque Cl. *Laxmanno*, qui ſaepius iuga niualia iſta frequentauit, innotuerat. *Patrino* noſtro docente ſub medium Iulii demum florere incipit haec planta et verſus Auguſti finem ſemina maturat. Petropoli et Moſcuae ſata

diffici-

difficilime germinarunt ſemina, teneraeque plantae parum adhuc de ſe in ſequentem annum promittunt.

Deſcriptio.

Radix huius plantae, quam *Siſon crinitum* appello, craſſitie eſt digiti minoris, externe brunnea, ſubrugoſa, intus flaueſcens, perpendicularis vel obliqua, longitudine fere digiti, radiculas aliquot laterales exſerens. *Sapore* ſe commendat ſubdulci.

Caulis raro pedalis, rariſſime pedali longior, pro modulo altitudinis robuſtior, adeoque pumilus: teres, argute ſtriatus, violaceo ſaepe tinctus, foliis, ramisque lateralibus vmbelliferis et vmbella terminali maiuſcula inſtructus. *Rami* bini, vel duorum parium, interdum trini verticillatim oppoſiti.

Folia radicalia in orbem diſpoſita, rhachi baſi dilatata caulem vaginantia, triplicato-pinnata, laciniis vltimis ſetaceis, ſubramoſis. *Caulina* ad ramorum exitum, eorumque numero, baſi caulem ſubuaginantia, diuiſura radicalium. *Folia* duo minora in ſingulis, ramis oppoſita, cauli propiora.

Umbella terminalis caulis majuſcula, copioſa (25 ad 30 radiorum); *rameae* omnibus partibus minores (circiter 20fidae), conniuentes, omnes ſubconcauae. *Inuolucrum* vniuerſale vmbella dimidio breuius, foliorum 5 ad 10 decompoſito-capillarium. *Umbellulae* earumque *involucella* ſimillima.

Flores minuti, omnes fertiles: *Corolla* aequalis; *petala* inflexo cordata, alba; *filamenta* petalis longiora, *antherae* ſubrotundae.

Fructus: (*fig. a*) oblongo-ouatus, lateraliter compreſſus, *ſtylis* duobus inſignibus terminatus. *Semina* extus quadriſtriato-ſubtetragona, *ſapore* debili, aromatico, ſubacri.

* * *

Deſcriptio adlata, paucis mutatis et additis, *Patrinum* auctorem habet. Siſon vertillatum *Linnaei* in Flora Scotica Cl. *Lightfoot* (Vol. II. p. 1096. tab. 35.) optime delineatum et deſcriptum, ſtructura fructus et foliorum ad habitum plantae noſtrae altaicae ſatis prope accedit; ſed folia habet minus compoſita, quae in noſtra ſpecie ſunt ſimillima *Meu*, plantae itidem alpinae. Propius adhuc ad Siſon crinitum foliis videtur accedere Siſon ammi. A reliquis cognitis ſpeciebus huius generis late differt, poteritque apte definiri:

Siſon *foliis omnibus tripinnatis capillaribus, involucris decompoſito-ſetaceis.*

II.

Peucedanum redivivum.

Tab. VIII. fig. 1 ad 3.

Inter plantas arido atque ſubſalſo deſerto, quod Mare Caſpium a parte ſeptentrionali late ambit, peculiares, plures

plures legi Peucedanorum ſpecies, alio tempore deſcribendas; quarum e numero fuit etiam haec, minime quidem conſpicua, ſed notatu digna tamen ſpecies, cuius iconem octauae Tabulae figurae referunt. Prouenit in aridiſſimis, limoſo-arenoſis, aliqua ſalſugine imbutis collium, quibus Promontoria Uralenſia in deſertum illud, inter Rhymnum et Volgam fluuios, excurrunt. Praeſertim copioſam obſeruaui circa Caricyn, ad Uruslan riuum, et in deſcenſu collium inter Samaram et Rhymnum extenſorum, ad Iitek riuum; vt et ad Uſen dictos fluuiolos medii deſerti. Vernis menſibus ſtirps elegantiſſime plumoſa promit folia, in ſtellam expanſa, quibus ad finem fere vſque Maji viget, nullo adhucdum ſcapi floriferi veſtigio conſpicuo (Fig. 1.). Ingraueſcente tunc ſolis ardore pereunt folia, neque prius, quam Iulio et Auguſto, prodeunt in conſpectum caules macilenti, aphylli (Fig. 2.), qui flores et ſemina perficiunt, nullo tunc foliorum radicalium ornatu ſtipati. Plura quidem deſertorum Peucedana caulem marceſcentibus demum foliis perficiunt, ſed nulla ſpecies tam ſero, et ſine omni foliorum veſtigio, tantoque poſt foliorum interitum temporis interuallo reviviſcit.

Deſcriptio.

Radix pluriennis, ſubſimplex, perpendicularis, filiformis, craſſitie calami ſcriptorii, extus fuſca, nauſeoſo-ſubdulcis; ſummitate ramentis foliorum emarcidis ſcarioſa.

Folia radicalia bipinnata, glauceſcentia, ſubinſipida; pinnarum *pinnulis* multifido-capillaribus, breuiſſimis, vs-

que ad rhachim communem ſeſſilibus. Hae pinnulae in prima aetate foliorum (fig. 1.) confertiſſimae, vt pinnae quaſi criſtatae appareant; elongato demum et marceſcente folio (fig. 3.) diſtinctiores.

Caulis florifer, poſt interitum foliorum e capite radicis ſolitarius, tenuiſſimus, erectus, ſubſeſquipedalis, *vaginulis* aliquot aphyllis per intervalla notatus; ſupra ſubdiuiſo-ramoſus, *ſtipula* ad ſingulam diuiſuram minuta. *Rami* capillares, terminati *vmbellis* quadrifidis.

Inuolucrum vmbellae ex vna alteraue ſtipula minutiſſima, ſaepe vix vllum. *Umbellulae* 5 ad 7 florum, *involucello* e ſtipulis minimis, ternis vel quaternis.

Flores minuti, *corollis* aequalibus albis, omnes fertiles. *Fructus* oblongus, *ſtylo* gemino, reflexo terminatus, bipartibilis. *Semina* (fig. 4.) oblonga, plana, membranaceo-marginata, extus triſtriata, guſtu leuiter aromatico, ſubacri.

* * *

Poterit noſtra ſpecies eo minus confundi cum Peucedano minore *Linnaei*, cuius definitio in eam quadrare videri poſſet: quum in noua Editione *Florae Anglicae* (1778. Tom. I. p. 128.) Peucedanum illud minus cum Pimpinella dioica coniunxerit *Hudſonus*, adeoque omnino annihilauerit praedictam Linnaeanam ſpeciem. Definitio *Peucedani* noſtri *rediuiui* ſequens dari poſſe videtur:

Peuce-

Peucedanum *foliis radicalibus bipinnatis, plumoſis, caule ſerotino, aphyllo, ramoſo; vmbellis paucifloris albis.*

III.

Leontice altaica.

Tab. IX. fig. 1. 2. 3.

Huius plantae elegantiſſimae, vtpote vernalis et fugacis, ipſe nullum in apricis montium Altaicorum, quos ſera demum aeſtate itinere attigi, veſtigium inueneram. Sed copioſa nuper ſpecimina florentis, fructuque inſtructae, ſimul cum tuberibus radicalibus quae apud me in olla floruerunt, transmiſit diligentiſſimus P. *Schangin,* ad fodinam Montis Serpentum Chirurgus, Is Leonticen hancce nouam copioſe in confragis circa praedictum montem obſeruauit et Maio florentem legit. *Bulbi*, ſeu tubera ab eodem miſſa, quae autumno terrae mandaueram, apud me in hypocauſto parum calente iam menſe Ianuario floreſcere inceperunt, vix tardius Fumaria deinde deſcribenda. Non autem, vt Liliaceae vulgo ſolent, e vagina recti prodeunt caules floriferi, ſed incuruati, ſtrenue nutante florum foliorumque floralium in oblongum volumen compactorum glomere, quod tarde demum erigitur et flores iam explicat, antequam erigatur. Similiter incuruati hinc inde prodeunt e terra petioli foliorum radicalium, e diſtinctis tuberum gemmis pullulantes, incerto numero, ſolitarii, bini, terni, raro plures. Deſcriptionem partim e ſpeciminibus ſiccis e Sibiria acceptis, partim e viuis, quas ſub oculis habeo plantis, expediam.

De-

Deſcriptio.

Tubera radicalia globoſo-ſubdepreſſa, ſupra vmbilicata et verrucis hinc inde, folia producentibus, hiulca; intus alba, ſolida, extus gryſea; odore et guſtu bulbi Lilii vel Orchidis.

Caulis floriferus et foliatus ex vmbilico tuberis medio, *foliaque* minora radicalia bina vel ſolitaria e verrucis ſparſis.

Caulis (rarius ex eodem tubere bini) teres, a digitali ad ſpithamalem longitudinem excreſcens, erectus, ſimpliciſſimus, *racemo* florifero, *foliisque* ternis racemum ſtipantibus terminatus.

Folia ex ima bractea racemi terna, patentia, plerumque quinata, *foliolis* ſubſeſſilibus, oblongis, integerrimis, mediis maioribus, lateralibus minutis, hinc inde deficientibus. *Folia radicalia* in petiolo caule breuiore, ternato-quinata. In planta ſemina perficiente folia ſaepe ad inſignem magnitudinem (fig. 3.) excreſcunt, colore ſemper pallide viridi.

Racemus florens (fig. 1.) breuiſſimus, inter folia caulina ſeſſilis, florum 7 ad 10. *Bracteae* ſeſſiles, ouatae, ſubretuſae, concauae, perſiſtentes, viridi-flaueſcentes, ſtriatae. *Flos* e ſingula bractea ſolitarius (*A.*), demum longius pedunculatus, erectus, ſaturate flauus. *Petala* ſtaminibus longiora, ouali oblonga, vtrinque aequaliter colorata. *Nectaria* ſtaminibus adſtantia iisdemque breuiora

(*B. C.*)

(*B. C.*) linearia, truncata, apice medio ſubemarginato, vtroque angulo mucronato. *Stamina* conniuentia; *filamenta* nectariis paulo breuiora, teretia. *Antherae* erectae, oblongae, vtrinque ſulco exaratae. *Germen* ſuperum, ventricoſum; *Stylus* longitudine filamentorum, *ſtigmate* ſimplici.

Racemus fructificans (fig. 2.) elongatus, pedunculis pendulis. *Pericarpium* membranaceum, auctis ſeminibus demum dehiſcens, inaequaliter fiſſum; continens ſemina (plerumque) quatuor ouata, apice ſeſſilia et areſcente etiam pericarpio adhuc inhaerentia.

Poterit huic Leontici ſequens definitio applicari:

Leontice *foliis caulinis ternis quinatis*, *radicalibus ternoquinatis*; *racemo laxo*, *ſeſſili.*

Adieci in eadem Tab. VIII. ad fig. 4. Tuber illius *Leontices veſicariae* delineatum, quam in *Itinerarii Tom. III. Appendicis n.* 84*. *Tab. V. fig.* 2. propoſui et cuius flores obſeruare nondum contigit, quamuis copioſa ante aliquot annos tubera Orenburgo ad Academiam fuiſſent transmiſſa, figura et magnitudine plerumque iconem hic propoſitam referentia.

IV.

Aſphodelus altaicus.

Tab. X.

Generi Aſphodelorum, minime copioſo, nouam e Sibiria meridionali ſpeciem addamus, cuius quidem ſcapos fructiferos, ſed ſine vllo foliorum veſtigio, ipſe, dum in regione Irtis fluuii, inter Schulbam et Ubam collaterales fluuiolos, iter facerem, copioſe obſeruaueram. Eandem, meo indicio, tempore floreſcentiae nunc collegit et praeter plurima ſiccata ſpecimina, etiam radices recentes, quae apud me nunc laete germinant, transmiſit Amiciſſ. *Schangin.*

Creſcit autem haec inſignis planta et primo vere floret in campis elatis et collibus apricis, ſecundum Ubam, ad pedes Jugi Altaici extenſis, denſo et herboſo caeſpite obductis; neque vſpiam alibi per omnem Sibiriam oblata eſt. Adeo copioſus eius eſt in illa regione proventus et tantum ſcapis, ſaepe vlnaribus, inter reliquas herbas eminet, vt itinerantis non poſſit non in oculos incurrere. Vltimis diebus Iunii per iſtos campos vectus aeger, matura e ſcapis ſemina copioſe quidem legi, ea vero nunquam in hortis pullularunt. Radices tunc aſſervari, propter aegritudinem et impedimenta alia, non potuerant. Nunc vero plantam, tam e ſiccis ſpeciminibus, quam ex iis quae nunc apud me in ollis virent, quam potero exactiſſime deſcribam.

De-

Deſcriptio.

Radix tuber diſcoideum, ſubtus et per ambitum digitatum radicibus crebris pollicaribus et ſesquipollicaribus, craſſitie culmi vel calami minoris, muticis, in prima aetate viridibus, poſtea gryſeis.

E ſuperiore ſcarioſa parte tuberis radicalis folia cum ſcapo germinant *vagina* duplici, alternatim ſupra terram exſerenda.

Folia quina, ſeptena vel octona, ſpithamalia, erecta, argute triquetro-carinata, interius canaliculata, acutiſſima, glauco viridia.

Scapus inter folia bipedalis (fructiferus ſaepe tripedalis et craſſitie digiti) rectiſſimus, teres, laeuis, aphyllus; extremo racemoſus et aliquot bracteis membranaceis ſterilibus infra racemum alternatim adſperſus.

Racemus dodrantalis vel vltra, floribus ſpirali ordine alternis, ſtrictim erectis. *Bracteola* ad ſingulum pedunculum membranacea, ſubulata, pedunculo breuior.

Flores longius pedunculati, ſubnutantes flauo-vireſcentes, nudi: *Petala* ſex patentiuſcula, linearia, carinata, ſtria dorſali viridi notata. *Stamina* petalis duplo longiora, *filamentis* capillaribus, *antheris* incumbentibus, minutis, flauis. *Piſtillum* ſtaminibus paulo longius, *germine* ſubgloboſo, *ſtylo* capillari ſimpliciſſimo.

 Fructus

Fructus (fig. *A*) in emarcido flore excreſcens, maturus tandem nudus: *Capſula* perfecte globoſa, dura, tripartibilis, tarde dehiſcens, trilocularis; continens *ſemina* in ſingulo loculo plura, triquetra, fuſca.

* * *

Definitionem huic ſpeciei ſequentem conuenire poſſe puto:

Aſphodelus *ſcapo nudo ſimpliciſſimo, foliis triquetro-carinatis, laeuibus.*

V.

Aquilegia viridiflora.

Tab. XI.

Aquilegiam propono nouam, vltimae Dauuriae rupibus peculiarem, quam nuper ad plantam hortenſem, e ſeminibus a me transmiſſis natam, equidem deſcripſit Cel. *Murray* (*Commentar. Soc. Reg Goetting. Vol. III. p.* 8. *Tab. I.*) Cuius tamen ſpontaneae faciem et prouentum e propriis obſeruationibus addere minime ſuperfluum videtur.

Quum hanc plantam in Dauuria ſpontaneam legerem, credidi varietatem *Aquilegiae Canadenſis*, a climate perſonatam; imo hoc ipſo nomine in *Itinerarii Tom. III. p.* 230. eandem inter plantas obſeruatas ad rupes Adontſchelo, Ononem et Borſam fl. interjacentes, recenſui. Sed quum poſtea ſemina Moſcuae et Petropoli ſata in hortis

hortis variis, variique ſolo per plures generationes ferae plantae praecipuos characteres ſatis conſtanter ſeruare viderem, ſpeciem diſtinctam, Sibiriae orientali peculiarem, eo lubentius agnoui, quod Aquil. canadenſi in hortis cultae collata ſatis, per omnes fere partes, differre videbatur. Differt adhuc magis ab Aquilegia illa Lenenſi, quam *Gmelinus* in *Flora Sibirica* delineauit, *Linnaeus* autem inter ſpecies non adoptauit, licet vere diſtincta ſit. Itaque noſtram *Aquilegiam viridifloram* appellaui, et deſcriptionem pariter atque iconem e *planta ſpontanea* hic inſero, quae in ſupra indicato Dauuriae loco, ad meridionale latus rupium granitoſarum, ad praeruptam baſin, abunde perennat.

Deſcriptio.

Radix perennis, fibroſa, fuſca, in omni ſolo hortenſi vigens.

Folia radicalia plurima, petiolis erectis, longiuſculis eleuata, glauco-viridia, ternata: *foliolis* tripartito-inciſis, laciniis obtuſis. *Guſtus* herbae fatuus.

Caules medio inter folia enaſcentes, pallidi vel rubentes, glauco rore obducti, et tenerrima lanugine pubeſcentes; teretes, ſaepius vnifori plures, primarius paulo procerior, ſubramoſus, foliis floribusque circiter tribus. *Folia* caulina ternato-inciſa, in ſummis ramoſi caulis ramis ſolitaria, ſublanceolata.

Flores cernui, campanulati, viridi-flaueſcentes, intus flauidiores, *odore* caryophylleo debili fragrantes. *Petala*

tala quina acuta, pallidius flauo-virentia, vnguibus nectariorum paulo breuiora, tandem patentiuſcula. *Nectaria* (exterius ſaepe, praeſertim in hortenſibus, cum vngue longitudinaliter obſoletiſſime purpuraſcentia) *calcare* petalis ſesquilongiore, rectiſſimo, obtuſo, ſub defloreſcentiam patenti-diuergentia. *Vnguis* nectarii latior, obtuſe rotundatus, minime patens. *Stamina* flaua, cum filamentis corollam aequantia. *Piſtilla* ſetacea, duplo fere longiora.

Capſulae quinae longae, extremo reflexae, ſtylis capillaribus acuminatae, vix euidenti lanugine pubeſcentes. *Semina* atra, ſine nitore.

* * *

Planta hortenſis euadit procerior, caulibus in ramos plures, parallelos, vnifloros magis elongatis. Foliola maiora, triloba et quinqueloba. In ollam tranſplantata et hypocauſto temperato illatá floret circa feſtum Natiuitatis Chriſti et flores multo fragrantiores tunc profert.

Addidi in vacuo Tabulae ſpatio ad fig. 1 et 3. Florem et capſulas illius Aquilegiae in alpinis et nemoroſis vlterioris Sibiriae vulgaris et pulcherrimae, quam pro varietate Aquilegiae vulgaris *Linnaeus* habuit, cuius etiam habitus in hortis noſtris, per continuatas generationes, ſenſim ad vulgarem europaeam accedit, colore floris (cyaneo, cum nectariorum ſcaphis partim albis) ſeruato; dum in ſpontanea etiam caules plerumque vniflori, florum magnitudo, folia et totius plantae conſiſtentia fere diſtinctam ſpeciem loqui videantur.

VI.

VI.

Nepeta annua.

Tab. XII.

Quum autumno anni 1773. inter Yjus et Jeniſeam fl. iter facerem, in rupe quadam cotacea ad praeruptam prioris ripam alte prominente, quam Tatari iſtius regionis ſub appellatione *Anloo* ſacram habent (*), neque alio praeterea vllo in loco, e ſiccis tunc caulibus plantae admodum odoratae, ſpiciferae, quam primum pro *Nepetae multifidae* (Flor. Sibir. III. t. 55.) varietate habui, ſemina matura lecta ſunt, iis, quae indicata Nepeta profert, ſatis ſimilia: Haec dein Moſcuae et Petropoli terrae commiſſa protulerunt plantam *annuam*, eoque, vti et foliis et ſtructura reliqua, a Nepeta multifida penitus diuerſam, cuius hic, tanquam nouae, Sibiriae propriae ſpeciei deſcriptionem proponam (**).

Herba tenera, laete viridis, facile marceſcens, ſiccatione fluxa et nigreſcens, cito admodum incremento ante Iulii initium in hortis noſtris floreſcit, toto Iulio floret, demum ſeminibus Auguſto perfectis tota marceſcit atque perit, annua. Fragrantiſſima eſt, et ſiccata quoque odorem

(*) Vid. *Itinerar.* mei Tom. 3. p 328.

(**) Cum iſta iam ſcripta et typographo tradita eſſent, venit ad manus Cl. *Car. à Linné* Supplementum Plantarum, diu expectatum, vbi video (p. 273.) Nepetam noſtram nomine *N. multifidae* diſtingui a planta Florae Sibiricae l. c. quam olim in ſpeciebus Plantarum Ill. Parens ſub iſto nomine recenſuerat, nunc *N. lavendulacea* dicta. Miſeram Ill. Viro vtriusque et ſpecimina ſicca et ſemina.

odorem ſeruat penetrantiſſimum, camphoratum, quo vix Nepetae multifidae cedit et cephalalgiam paene excitat. Hinc inter plantas medicinales inquilinas recipienda videtur.

Deſcriptio.

Caules (e *radice* breui, ſimplici, ſubramoſa) bi-vel ſeſquidodrantales, erecti, tetragoni, obtuſanguli, lateribus duobus profundius canaliculatis: ab imo brachiati *ramis* decuſſatim poſitis, 2, 4 vel 6 parium, cauli ſimilibus, folioſis et ſpicatis.

Folia ad ramos oppoſita, tripartito-ſaepius quinquepartito-multifida, vel ſubpinnatifida, multipartita, laciniis ſublinearibus, obtuſis; villoſitate tenerrima, vti tota planta, ſubincaneſcentia.

Flores (praeter *verticillum* vnum alterumue ad ſumma foliorum paria ſubdecemflorum, ſtipulis linearibus vel trifidis ad pedunculos vtrinque adſtantibus ſtipatum) congeſti in *ſpicas* terminales, confertim verticillatas, ſaepius apice nutantes, *bracteolis* ſeu ſtipulis inferius ſubtrifidis, plerumque lineari-ſubulatis intermixtam.

Calyces ſtriati, piloſi, quinquefidi, laciniis acuminatis, ſubaequali-conniuentibus. *Corolla* vix calyce longior, alba, minor quam in Dracocephalo thymifloro, at eidem ſimillima: *labio ſuperiore* ſubcordato, ſtamina maiora aequante, *inferiore* trifido, lacinia media lato-cordata, lateralibus paruis, obtuſis. *Antherae* fuſcae.

Semi-

Semina in calyce ſicco maturata minuta, oblonga, vtrinque acuta, gryſeo-fuſca, ſummoque apice alba.

* * *

Poterit haec *Nepeta*, ſola in ſuo genere *annua*, ceterum ad Nepetam multifidam (Linnaeo quondam dictam) habitu ſatis prope accedens, apte definiri:

Nepeta *foliis pinnato-multifidis linearibus, ſpicis terminalibus aphyllis.*

VII.

Phlomis alpina.

Tab. XIII.

Eſt haec e ſpecioſiſſimis alpinarum, quas mihi Chirurgus *Schangin* transmiſit, in ſummis jugis altaicis lectas. Doleo autem neque locum vbi viget, neque radicis naturam indicatam fuiſſe; vnde mancam tantiſper deſcriptionem propono, donec e ſeminibus transmiſſis excreuerint plantae Quantum ſpecimina, cum foliis radicalibus transmiſſa ſuadent, videtur perennis radicis eſſe filia. Habitu haec planta ad nullam magis, quam Phlomidem tuberoſam, accedit.

Folia radicalia longius petiolata, magna, cordata, baſi valde ſinuata, margine vndique crenata, pubeſcentia.

Caulis videtur pumilus, vix ſpithamali altior, obtuſe tetragonus, pubeſcens, pari foliorum in medio, extremitate vero verticillis foliatis confertis, 3 ad 6, inſtructus.

Folia caulina petiolata, cordata, ſerrata, petiolis ſubamplexicaulibus: *verticillaria* ad ſingulum verticillum bina, ſeſſilia. Horum infima duo lato-lanceolata, ſerrata, venoſa; proxima aliquoties crenata, trineruia, lineari lanceolata; reliqua ſenſim anguſtiora, linearia, integerrima. *Verticilli* conferti, circiter decemflori, *bracteis* tribus vel quatuor ſetaceis, villoſis ſub ſingulo flore. *Calyx* ſubcampanulato-cylindraceus, angulatus, villoſus, dentibus quinque ſetaceis, reflexo-patulis. *Corolla* fere Phlomidis tuberoſae, eiusdemque coloris: *Galea* pubeſcens, margine crenato-bifida et denticulata, ſimul villis albidis late fimbriata. *Labium* inferius glabrum, tripartitum, lacinia media biloba ſeu obcordata, lateralibus triangulo-ſubacutis. *Antherae* fuſcae, ſimplices.

Calyx fructificans perſiſtens, *ſemina* in fundo fovens quaterna, triquetro-conferta, ſupra truncata, vt in congeneribus.

* * *

Definitio huius Phlomidis haec fere ſufficiet:

Phlomis *inuolucris ſetaceis villoſis, foliis radicalibus, caulinisque cordatis ſerratis, verticillaribus lanceolatis trineruiis.*

VIII.

VIII.

Fumaria Schangini.

Tab. XIV. fig. 1. 2. 3.

Non eſt varietas *Fumariae bulboſae*, quam nouo ſub nomine propono: iſta enim, licet aliena facie in Sibiria occurrat, (grandior ſcilicet, et flauis ſaepe floribus inſignis), ab hac noſtra tamen conſtanter diſtincta apparet. Creſcit haec Fumaria circa Montem Serpentum et Alei fluuium in locis ſalſuginoſis deſerti Barabenſis, primoque vere floret. Tranſmiſit eius ſpecimina ſicca, et recentia tubera aliquoties iam laudatus Chirurgus *Petrus Schangin*, cuius illam nomini inſcripſi. Tubera autumno terrae condita, Ianuario menſe apud me floruerunt, in hypocauſto non admodum calente; quod etiam de Fum. bulboſa obſeruatur.

Deſcriptio.

Radix tuber ſubgloboſum, mole nucis, extus fuſcum, glabrum, ſubtus fibris aliquot capillaribus barbatum; pollicari circiter profunditate in caeſpite latens.

Herba ſupra terram emergit vagina obliqua, hinc dehiſcente, membranacea, e qua prodit *ſpica* bracteis imbricata, duobus tribusue *foliis* ſtipata. *Caulis* rubente albidus, teres, folia bracteaeque glauco-viridia, pallidiora.

Folia biternata, *foliolis* trifidis, lobis lanceolatis. *Racemus* terminalis in robuſtiore planta (fig. 1.) multiflo-

rus, ſtrictior, in debiliore (fig. 2.) ſaepius pauciflorus. *Bracteae* lanceolatae longitudine pedunculi.

Flos transuerſo plerumque ſitu dum viget, cyaneſcente-albus, *nectario* longiſſimo, rectiuſculo, ſubulato (fig. 3.). *Labium ſuperius* maius atque latius; *inferius* verſus pedunculum ſubgutturoſum, vtrumque argute carinatum, ſuperioris carina linea cyanea. *Faux* argute tetragona, obtuſa, toto apice atropurpurea. Fructificans ſpica elongata, pedunculis deflexis. *Legumina* (fig. 4.) longa, lineari-ſubenſiformia, *ſtylo* capitato aucta, venis ſtriata: *ſemina* lenticularia nigra, plurima, 10 ad 12.

* * *

Poterit haec Fumaria, cum qua planta *Florae Sibiricae IV. p. 66. n.* 88. conferenda eſt, hoc modo definiri:

Fumaria *caule ſimplici folioſo, bracteis flore dimidio brevioribus.*

IX.

Aſtragalus deflexus.

Tab. XV.

Theatrum Naturae perluſtranti facile apparet, quamlibet terrarum plagam, continuis montium iugis oceanovae incluſam, quorundam praeſertim generum, tam ex plantis, quam ex animalium cenſu, numeroſiſſimis ſpeciebus

lus pullulare. Sic Africa auſtralis Proteis, Ericis, Ixiis, Meſembryanthemis, Geraniis heptandris celebrata eſt. America calidior Cactos, Epidendra, Paſſifloras, Filices mirabili diuerſitate profert; Europa auſtralis, cum proximo Oriente maxime abundat Ciſtis, Teucriis, Centaureis, Trifoliis atque Umbellatarum farragine; ſalſa Tatariae Aſiaeque reliquae deſerta Staticibus, Salſolis, Chenopodiis, Atriplicibus cum affini Axyridum genere et conſanguineo his Ceratocarpo (*) favent; Aſia *auſtralis* Maluacearum (in *boreali*, mirum! plane deficientium) et Cucurbitacearum ferax eſt; Sibiria denique noſtra ſeu Aſia borealis ſcatet Iridibus, Campanulis, Gentianis, Alliis, Polygonis, Saxifragis, Spiraeis, Potentillis, Dracocephalis et Pedicularibus, Artemiſiis, Serratulis et omnium maxime *Aſtragalis*, e quo genere ſpecies plus quam triginta Sibiriae plane peculiares produci poſſunt. Harum iam complures *Gmelinus* Flora ſua Sibirica notas reddidit; plures autem deſcribendae ſuperſunt, e quibus hic vnam, ad niualia iuga Dauuriae lectam, praemitto reliquis alio tempore deſcribendis. Iam defloruerat, et ſemina ex parte perfecerat, quum ſera aeſtate in excelſis montibus circa

(*) Non poſſum non hic incidenter monere, *Atriplicem* ſic dictam *pedunculatam* Linnaei, pro vera ſpecie *Ceratocarpi*, quoad fructificationis characteres, ponendam eſſe: Etenim *fructus*, non Atriplicum more, nudo ſemine inter duo foliola calycina aucta, teſtam biualuem vtcunque referentia, reſidente conſtat, ſed eſt *capſula* plano-membranacea, obcordiformis, pedicellata, quae clauſa vndique cum ſemine fit decidua. *Flores* itidem, vt in Ceratocarpo, ſeſſiles, maſculi femineis adiuncti. In habitu etiam conuenientia fere et differentia eadem, inter duas haſce plantas, quae inter Coriſperma hyſſopyfolium et ſquarroſum, quod vltimum Ill. *Linnaeo* haud bene notum fuiſſe ſuſpicor.

Balyra riuum, aliosque Ononem influentes, collecta fuit. Petropoli et Moſcuae in hortis ſolo udo ſata ſemina plantas produxerunt et propagarunt ſpontaneae omnibus proportionibus ſimillimas, quae ſecundo anno per totam fere aeſtatem ſuccedentibus ſenſim ſpicis floruerunt, ita vt ſingula ſpica vix biduo vigeat et legumina poſt ſeptimanam fere maturet.

Radix biennis, ſubſimplex, adtenuata, tenax.

Folia radicalia pauca, ſubdodrantalia, caneſcentia, foliolorum 10 ad 12. paribus, cum impari, pinnata; *foliola* retrovergentia, ouato-lanceolata, baſi latiuſcula.

Caulis alternis ſcapis ſubramoſus, folio ad ſingulam diviſuram.

Scapi teretes, angulis argutis ſtriati, pilis canis pubeſcentes, ſpica terminati, minuſcula, ſubquindecim flora.

Flores primum imbricati ſurſum, deflorati ſenſim cernui, magnitudine vix Medicaginis ſatiuae. *Calyces* breviſſime pedunculati, *bracteola* ſtipuliformi, lineari, piloſa ſtipati, quinquedentati, dentibus linearibus, ſuperis 2 magis diſtantibus, infero paulo longiore. *Vexillum* paruum; oblongum, *alae*que vexillum aequantes; apice deflexo-conniuentes purpuraſcunt; carina magis roſea. Deflorata corolla primum coeruleſcit, demum liueſcit.

Legumina, (*Fig. A.*) pendula, triquetro-conuexa, hinc

hinc canaliculata, bilocularia. *Semina* reniformia fuſco-luteſcentia, minuſcula.

* * *

Definitio huius ſpeciei erit:

Aſtragalus *cauleſcens, foliolis leguminibusque retrorſum vergentibus, ramis ſpiciferis nudis, folio longioribus.*

X.

Doronicum altaicum.

Tab. XVI.

Pulcherrima haec planta alpina, e ſeminibus crebro e Sibiria transmiſſis, in hortis Petropoli et Moſcuae laete creſcit et ſecundo anno floret; primo anno tantummodo foliis oualibus, maiuſculis, ſubdentato repandis luxurians. Spontanea creſcit, eadem qua in hortis ſtatura, in niualibus Montium Altaicorum iugis, et vti loco, ita etiam habitu formaque partium et defectu (in florentibus) foliorum radicalium, a Doronico Pardalianche, cui proxime affinis eſt, ſpecifice differt.

Radicis caudex mole articuli digiti, ouatus, carnoſus, extus fuſcus, inferiore extremitate ſubacuta emittens radiculas deſcendentes, dodrantales, decem ad quindecim, albidas, filiformi-adtenuatas, hinc inde fibris lateralibus adſperſas. *Odor* radicis hircino-aromaticus; *ſapor* amaro-ſubacris.

Folia

Folia radicalia florentibus nulla. *Caulis* e radice ſolitarius, erectus, ſpithamaeus vel vltra, ſubtetragono-angulatus, alterne folioſus.

Folia (vt Lactucae tenera) rugoſa, glaberrima, amplexicaulia; radici proxima duo minuta, *infimum* praeſertim minimum, bracteaeforme; proxima *duo* oualia, rotundata, inferius anguſtata, decurrenti-amplexicaulia; *medium* ad caulem rotundatum, ſubacutum; *ſuprema* 3 vel 4, ſenſim minora et acutiora, magisque dentata.

Flos terminalis, ſaepe ad ſummum folium ſeſſilis. *Calyx* ſub receptaculo infra cavus, ſubturbinatus, glaberrimus; ſquamis alternis, lineari-lanceolatis, acutiſſimis, pallidis. *Radius* corollae calyce multo longior, patens, floſculis ſimplici ordine femineis, ligula lineari, acuta, flaua. *Receptaculum* ſubconicum, *floſculis* hermaphroditis confertis, copioſis, aequalibus, *pappo* lanoſo calyculatis, ſucceſſiue ab ambitu ad centrum effloreſcentibus. *Semina* linearia, ſtriata, luteſcentia, pappo ſeſſili.

Herba tota ſubamaro-aromatica, certiſſime medicata. Doctiſſ. *Patrin* radicem ſpontaneam, exigua licet quantitate aſſumtam, emeticam expertus eſt. Herba forſan Arnicae, quae Ruſſico Imperio fere deeſt, ſuccedanea eſſe poterit.

CAPRA

CAPRA CAVCASICA,

E SCHEDIS CEL. A. I. GÜLDENSTAEDT,

REDIGENTE

P. S. PALLAS.

Inter Quadrupedia, Collegae pie defuncto Cel. *Gülden-ſtaedt* durante itinere oblata, notatu digniſſimum eſt illa Caprae ſpecies, quam Vir clar. primum pro *Ibicis* varietate habuit, poſterioribus vero curis pro peculiari ſpecie ab *Ibice* et *Aegagro* mihi dicto (*) penitus diuerſa agnouit, et cuius publicam deſcriptionem ideo diſtulit, quod anatome huius animalis in Caucaſo oblati, propter viſcera ictu ſclopeti et lapſu e praerupta rupe laeſa, adminiſtrare non potuerat, continuoque vivum vel hyemali frigore conditum animal a Terekienſibus amicis obtenturum ſe ſperauerat. Quandoquidem vero haec ſpes Defunctum per aliquot annos fefellit et nunc quoque longinqua videtur, malui publicam expoſitionem rariſſimi animalis amplius non differre, et quicquid in poſthumis ſchedis *Güldenſtaedtii* noſtri de eo notatum inuenio, cum Iconi-bus

(*) Spicileg. Zoolog. Faſcic. XIV. p. 43. ſeq.

bus cura eiusdem ad viuum animal pictis, tantiſper Actis Academiae inſerere, dum melior aliquando fortuna animal, pro accuratiore deſcriptione, internorum praeſertim partium, integrum nobis advexerit.

Capra haec, quam *Caucaſicam* vocare placet, frequentiſſima eſt in ſummis Caucaſi jugis, circa fluuiorum Terek et Kubam ſummas origines, itemque in Oſſetino tractu et Cachetia, ſchiſtoſis rupibus in ſummam altitudinem exaltata et exaſperata. Duo capita maſculorum, et integram deinde foeminam, ſed interaneis valde laeſis, e diverſis locis obtinuit Cel. *Güldenſtaedt*, ex iisque deſcriptionem quam ſtatim tradam, concinnauit. Eodem referente animal ab Oſſetinis appellatur *Zebüder*; a Dugoris *Sabaudur*; a Tſchetzentzis, Karabulacis et Inguſchorum gente *Hach*; a Tataris *Prus*; a Tſcherkeſſis *Tſchuguldur*; denique Didoica lingua *At'lhá*, et Ruſſis *Tur* audit.

Notabile autem eſt, verum *Ibicem*, quem e Sibiria minutim deſcripſi (*), et cuius (ſimillima mihi deſcriptis) cornua ex Heluetia ſibi curauerat afferri Def. Collega, in Caucaſo vel plane non viuere, vel Obſeruatori ſaltem noſtro nunquam oblatum fuiſſe. Contra vero Capra, quam *Aegagrum* dixi, quamque pro vera Bezoartica Capra habendam eſſe docui, ſatis frequens inferiora, ſociis Rupicapris amata, montium cacumina in Caucaſo tenet et nominibus barbaris probe diſtinguitur, Oſſetinis *Tzan*, Tſchetſchentzis *Bodſch*, Georgianis in Kewi *Achmetſchi*, circa Tiflis et Ateni *Gareauli-Tcha* ſ. fera Capra, dicta.

Hanc

(*) Loc. cit. p. 52. ſeq.

Hanc etiam Noſter e cornibus ad eum delatis tanquam diſtinctam ſpeciem agnouit, et mecum pro *Paſén* Kaempferi et Hirco ſpontaneo declarauit. Cornu *Aegagri* a Cl. *Güldenſtaedt* in Schedis deſcriptum atque Muſeo Academico illatum, longitudinem per arcum 39 pollicum, per ſubtenſam 27''. aequat; diametrum baſeos maximam habet 3''. 9'''. peripheriam 9''. 6'''. caeterum forma, nodis et curuatúra illis, quae ad Perſicum ſpecimen delineaui (*), ſimillimum deprehenditur. Iconem in *Tab. XVII. fig.* 2. adieci, a latere interiore pictam.

Capra caucaſica, vt dixi, ſumma iuga ſchiſtoſa, rupeſtria, nuda colit, dum Rupicapra (Dugoris *Ské* dicta) mitioribus paſcuis calcarei iugi delectatur. Prior dicitur coitum celebrare Nouembri, parere Aprili, adeoque quinquemeſtri ſpatio, vt domeſticae Caprae, vtero gerit. *Hoedi* eius (vt et Rupicaprae) capiuntur ſaepius, ſed cito perituri. Feras gregibus Caprarum domeſticarum immiſceri, illasve inire, Caucaſi incolis nunquam obſeruatum eſt. Adultorum Hircorum cornubus poculorum loco vtuntur Tatari monticolae et Georgiani, quibus caro huius animalis in deliciis eſt. *Deſcriptio* capitum duorum maſculorum, et integrae foeminae, qualem in Manuſcriptis Cel. *Güldenſtaedt* inuenio, hic, paucis mutatis vel excluſis, ſubiungo.

* * *

„*Caput* (*Maſculorum*) haud diſſimile capiti Hirci domeſtici, ſed maius. *Roſtrum* obtuſum, ſubnudum, na-

 rium

(*) Loc. cit. Tab. V. fig. 2. 3.

rium aperturis adproximatis, ſtrictis, vix pollicem recipientibus. *Naſus* recta in frontem continuatus, qui pariter planus, latusque; Latera capitis compreſſa.

Rictus paruus, labia ſtricta, piloſa. *Dentes primores* ſupra nulli, infra octo in arcum diſpoſiti, exteriores decreſcentes, omnes introrſum truncati, apicem verſus latiores, acie ſcindente, lata, nec in extimis acuminata. *Molares* ſupra octo, *infra* ſeptem, rugoſi, tribus primis et vltimo ſimplicibus. *Buccae* intus papilloſae, vt reliquis fere Ruminantibus. *Palatum* planum, rugis 10. transuerſis, obſolete exaſperatum.

Aruncus tres transuerſos digitos a labio inferiore diſtans, terſus, quadripollicaris.

Oculi laterales, a roſtro remotiſſimi, ſuperciliis ſetoſo-ciliatis.

Aures pone et infra oculos ſitae, acuminatae, piloſae, intus carina media nudae. *Pili* caput veſtientes rigidi, caprini, ſubpollicares (Ianuario), in fronte et occipite longiores et vorticoſi, fuſco-brunnei, intermixtis plurimis gryſeis. *Sinus* et *verrucae* in facie nulla.

Cornua adulti Capri (*Tab. XVII. fig. 2.*) pro mole animalis maxima, proxime ſupra oculos, contiguo fere ſitu inter ſe, poſita, retrorſum et extrorſum arcuata, apice denuo introrſum vergentia, ſordide nigra, obſolete triquetra, ſuperficiebus duobus anterioribus, poſtica latiore. Anteriorum ſuperior *rugis* transuerſis 10-14. nodoſa,

ſa, verſus baſin prominentioribus, extremo ſenſim confluentibus et obſoletis; Reliquae facies ſtriato-ſubundulatae.

Dimenſiones ita ſe habuerunt:

Longitudo a ſummo roſtro ad occiput -			13''.	0.
—— —— ad canthum oculi anteriorem -			7.	6.
—— —— ad cornuum radicem - -			9.	0.
—— —— ad aurium baſin - - -			11.	6.
Diameter transuerſus oris - - -			2.	6.
—— —— oculi - - - -			1.	3.
Longitudo aurium - - - -			5.	0.
—— —— arunci - - -			4.	0.
Diſtantia inter cornuum baſin - -	0''.	6'''.	0.	6.
—— —— apicem - - -	30.	0.	23.	3.
Longit. cornuum per ſubtenſam -	18.	0.	18.	0.
—— —— per curuaturam - -	28.	0.	27.	0.
Craſſities cornuum ad baſin - -	3.	9.	4.	6.
—— —— in medio - - -	3.	3.	3.	3.
—— —— in apice - - -	0.	4.	0.	4.

* * *

Feminae iam inciſam aeri Iconem reliquit Cel. *Güldenſtaedt*, cuius et exuuias adtulit Petropolin, et ſequentem deſcriptionem aduerſariis inſeruit:

Quantum Capra caucaſica mas Hircum domeſticum magnitudine cornuum ſuperat; tantum eius femina iisdem Caprae domeſticae inferior eſt. Nam in femina, ex omni habitu grandaeua viſa, *cornuum* apex tantum pollicem trans-

tranſuerſum prominet ſupra aurium apicem atque, detracto ſitu baſeos altiori, reuera tantum aurium longitudine ſunt. Auribus parallela adſcendunt, modice divergentia et leviſſime retrorſum arcuata. Craſſities auriculis minor. Tereti-compreſſa ſunt; ſuperficiebus duabus exterioribus, quarum anterior anguſtior, a poſteriori angulo prominulo, obſoletiſſimo diſtincta; tertia ſuperficies interior omnium latiſſima, tota rugoſa, rugis circiter 25. aliis anguſtis, aliis latioribus, aliis ſuperficialibus, aliis profundius ſulcatis, in angulo ſuperficies interiorem ab anteriori ſeparante obſolete tuberculoſis; imo apice laeuia, obtuſa; colore griſeo fuſca; ſtructura iis marium ſatis analoga, ſed curuatura et magnitudine diuerſiſſima.

Color animalis ſupra brunneo-ceruinus, abdomine et ano albido, extremitatibus nigris. Nares, labia et mentum *imberbe* nigra, gula et auriculae intus albidae, reliquum totum caput fuſco-cinereo et luteſcenti-albido varium, a pilis baſi fuſco-cinereis, apicem verſus luteſcenti-albidis, imo apice iterum fuſco-cinereis.

Collum totum, dorſum, ſcapulae, latera et femora exterius vniformiter brunneo-ceruina, baſi pilorum cinerea, apice brunneo-ceruino; *faſcia* a ceruice ad caudam per ſpinam dorſi decurrente anguſta, intenſiori, fuſceſcente. Pectus nigrum, pilis interſperſis albidis, abdomen album, cum cineraſcentis tinctura; nates albae cum luteſcentis tinctura. Axillae et margo poſticus antebrachii et metacarpi, ad ungulas ſpurias fere usque, albida, ceterum pedes antici a medio antebrachii usque ad

ad ungulas nigri. Femora interius et macula magna ouata ad latus exterius metatarſi luteſcenti-alba; ceterum pedes poſtici a calcareo usque ad ungulas nigra. Cauda nigra, baſi ſubtus luteſcens.

Pili rigidiuſculi, decumbentes, aequales; longiſſimi ſesquipollicares, in mento non elongati in aruncum; *lanugo* cinerea in dorſo et lateribus interpoſita.

Magnitudo Hirci domeſtici, ſed ſtatura ſat diuerſa, omnia breuiora et latiora. *Caput* latum, compreſſum, facie a fronte vsque ad nares lata, rectiſſima, nec ad oculos et nares protuberante. *Sinus*, *verrucae* et *ſetae* in facie nullae. *Oculi* laterales, pro mole animalis mediocres, *iride* fuſco-aurea. *Auriculae* oblongae, erectae, intus lineis quatuor piloſis obſitae.

Collum breue, latum; *truncus* compreſſus. *Cauda* breuis, craſſa, detrita.

Pedes craſſi, breues, ſubaequales; *Vngulae* bifidae, nigrae, margine exteriori vix prominulo albo; Ligamentum horizontale ungulas connectens nullum, faſcia pilorum inter ungularum utrarumque diuiſionem horizontalis alba. *Vngulae acceſſoriae* in quolibet pede duae, conicae, nigrae, lacerae.

Mammae inguinales duae, non quatuor, interſtitio piloſo ſeparatae. *Vulua* perinaeo anguſto, nudo ab ano diſtincta.

Dimen-

Dimenſiones ſecundum menſuram Pariſinam:

Longitudo a roſtro ad anum - - -	48″.	0‴.
Altitudo ab interſcapulio ad apicem ungul. antic.	31.	0.
Altitudo a lumbis ad apices ungul. poſticarum	33.	0.
Longitudo capitis a roſtro ad cornuum baſin	8.	3.
Circumferentia roſtri pone nares - - -	8.	6.
Linea curua ab angulo oris ad alterum -	6.	0.
Diſtantia inter angulos maxillae inferioris -	2.	9.
—— —— inter angulum inferiorem narium -	0.	5.
—— —— —— —— ſuperiorem narium -	1.	10.
Diſtantia inter canthos oculi - - -	1.	2.
—— —— palpebras maxima - - -	0.	9.
—— —— inter canthum anticum et roſtrum -	6.	3.
—— —— canthum poſticum et auris ſinum	2.	10.
—— —— canthos anticos oculorum recta -	4.	2.
—— —— —— —— —— curua -	4.	9.
Circumferentia capitis ante cornuum baſin -	18.	4.
Longitudo aurium - - -	4.	8.
Circumferentia partis convexae baſeos auricularis	4.	4.
Diſtantia inter auris et cornu baſin - -	1.	2.
—— —— inter aures ad baſin interne -	3.	6.
—— —— inter cornuum baſin interne -	1.	4.
—— —— —— —— —— externe -	3.	10.
—— —— —— —— apices - -	7.	9.
Longitudo cornuum linea recta inter apices et baſin - - - -	5.	10.
—— —— —— —— curua antice -	7.	2.
—— —— —— —— —— poſtice -	6.	2.
Diameter ad baſin longitudinalis - -	1.	7.
—— —— —— transuerſalis - -	1.	4.

Circum-

Circumferentia ad baſin - -	4.	7.
Longitudo colli a gula ad caput ſterni -	9.	6.
Circumferentia colli ad gulam - -	14.	—
—— —— —— ad ſternum - - -	17.	—
Diameter colli perpendicularis medii - -	6.	6.
—— —— transuerſalis ibidem - -	4.	6.
Circumferentia trunci pone axillas - -	36.	3.
—— —— trunci maxima - -	39.	6.
—— —— —— ante femora - - -	36.	—
Longitudo caudae - - - -	4.	6.
—— —— antebrachii a flexura vlnae ad carpum	8.	3.
—— —— metacarpi - - -	4.	7.
—— —— phalangium - - -	2.	6.
—— —— ungularum anticarum antice - -	1.	5.
—— —— —— —— —— poſtice - -	1.	1.
Latitudo maxima vngul. ant. ſimul ſumtarum	1.	9.
Longitudo cruris a genu ad calcaneum - -	10.	5.
—— —— metatarſi - - - -	6.	—
—— —— phalangium poſticarum - -	2.	6.
—— —— ungularum poſticarum antice - -	1.	4.
—— —— —— —— —— poſtice -	—	11.
Latitudo maxima ungularum poſticam ſimal ſumtam - - - -	1.	6.
Longitudo ungularum ſpuriarum - - -	1.	—
Diſtantia inter mammarum papillas - -	2.	6.
—— —— inter mammas et vuluam linea curua	10.	—

SCRVTAMEN CHEMICVM
LICHENVM PARASITICORVM,

Auctore
I. G. GEORGI.

In Actorum Academiae Petropolitanae Anni 1777 Part. I. expoſui principia chemica *Conferuae*, et Anni 1778 Part. poſt. *Agarici fugitivi* atque *Boletorum bouini* et *igniarii.* Inde adhuc in *Lichenes* quosdam paraſiticos inquiſiui, adhibens Species, quas Ill. *Linné phyſodem*, *glaucum*, *hirtum*, *farinaceum* et *pulmonarium* appellat, cum immixtis quibusdam aliis, quas omnes in ſylua Inſulae St. *Baſilii*, poſt diuturnas pluvias, et e truncis Betularum et Pinaſtri legeram. In aëre recens collecti Lichenes tertiam fere ponderis partem amittunt, ſervata tenacitate; in hypocauſto calido adhuc octaua parte ponderis exſiccatione imminuti, fragiliores evadunt.

Lichenum paraſiticorum variorum e Betulis lectorum quatuor unciae, coctura in aqua praebent juſculum flaveſcens, mucilaginoſum, paene inſipidum, ipſique cocti ſine ſapore quidem, ſed cum ſale facile edules ſunt; vt urgente annona pauperibus pro cibo inſeruire poſſe videantur.

Extra-

Extractum, quod producitur inſpiſſatione juſculi per infuſionem et lenem decoctionem e quatuor unciis Lichenum variorum parati, eſt bruneſcens, neque lubricitate inſigniore praeditum; quod deſiccatum vertitur in gummi eiusdem coloris, pellucidum, mucilaginoſum, fere inſipidum. haud dubie tamen nutritivum, illi, quod e radicibus Altheae vel Maluae obtinetur, perſimile; cuius pondus unciam cum dimidia aequauit.

Lichen pulmonarius ad Pinaſtrorum truncos lectus et eadem quantitate quadriunciali excoctus, tantum dedit ad unciam cum duabus drachmis gummi, ſapore magis adſtrictorium. Reſidui Lichenes, dum humebant, lubrici et tenaces, viridescentis coloris, exſiccatione nigreſcebant cum fragilitate.

Simile extractum e recentibus Lichenibus paratum, ad conſiſtentiam ſyrupi inſpiſſatum repoſui; quod poſt annuum ſpatium in ſuperficie Byſſo obductum, ſed veſtigium nullum Salis eſſentialis exhibere viſum eſt; id quod inſipida Lichenum natura etiam a priori ſuadet.

Lichenum conciſorum unciae duae in ſex unciis Spiritus vini alcoholiſati digeſtae et expreſſae, eundem fuſco-viridi colore et amarore inſigni tinxerunt. Tinctura aquae admixta flavo lacteſcit. Reſidui Lichenes in quatuor unciis ſpiritus vini rectificatiſſimi extracti, vix ullam tincturam guſtumve communicant. Vtramque tamen tincturam confudi atque filtratae omnem fere ſpiritum per alembicum ſubtraxi, qui purus prodiit. Reſiduum dein, leniter ſiccatum et elotum, drachma fuit inte-

 gra

gra reſinae purae, tenacis, brunescentis. E Lichene pulmonario quatuor ſcrupuli ſimilis reſinae prodierunt. *Neumannus* (Chym. Medic. Tom. I. p. 1036.) plus reſinae educere ſibi viſus eſt, quia ſpiritu vini ſimplici tincturam extraxit, neque gummoſum, quod ita mixtum prodiit, a reſina pura ſeparauit.

Lichenes cum aqua communi deſtillati, huic omnino nihil communicant, niſi odorem quendam vappidum; olei autem nullum prodit veſtigium.

Sexdecim unciae Lichenum in aëre ſiccatorum, nullo liquore addito, e vitrea retorta, balneo arenae deſtillavi; Prodierunt hoc modo:

1. Limpidi phlegmatis, inſipidi, vappido odore, uncia et duo drachmae.

2. Phlegmatis iam flaveſcentis, ſubempyreumatici, acidulo odore, digitisque ſublubrici, uncia una ſemis.

3. Sature flaui phlegmatis, innatante oleo empyrevmatico foeti, unciae binae.

4. Obſcurius flavi phlegmatis unciae duo, totidemque drachmae, in quo oleum empyreumaticum copioſius nigreſcens fundum petebat.

Non parum olei aduſti nigri in collo retortae adhaerebat; quod autem ſeparari potuit, trium drachmarum pondus aequavit.

Reſi-

Reſiduum deſtillationis carbonaceum uncias ſeptem et quinque drachmas effecit; ut igitur in deſtillatione partim amiſſi, partim vaſorum parietibus adhaereſcentis ponderis perierunt undecim drachmae.

Repetita deſtillatio ſexdecim unciarum Lichenis, eadem producta dedit, niſi quod olei empyreumatici drachmae tres cum dimidia ſeparari poſſent, reſiduoque pondus ſeptem tantum unciarum deprehenderem.

Phlegma, quod tertio, quartoque loco prodiit, empyreumate volatili et pungente odoratum guſtumque affecit, et chartam Heliotropii ſucco tinctam illico rubefecit. Syrupus violarum ab eodem phlegmate, infuſo equidem vireſcit, ſed is color potius a mixtis Syrupi et flavi phlegmatis coloribus, quam a chemica mutatione pendet. Solutione Salis tartari inſtillata phlegmati flauo-vireſcens oritur color, nullum efferueſcentiae ſignum, ſed odor aſſurgere viſus eſt ſubvolatilis. Cum acidis itidem tranquillum miſcetur, pereunte ſimul pungente odore. Quum unciae phlegmatis ſesquidrachmam acidi ſalis muriatici addidiſſem, et mixturam lente evaporaſſem, oleoſi multum ſegregabatur, reſiduum vero, cum ſolutione Salis tartari intritum, efferbuit, ſine ullo alcali urinoſi veſtigio edito.

Solutio cretae acido nitri parata a phlegmate iſto haud turbatur, imo ſequenti die mixtura, licet vireſcentis coloris, ſine ſedimento tamen fuit. Cuprum politum in phlegma poſitum nihil mutat; nec magis ſolutio ſacchari ſaturni movetur; ſed acido nitri ſolutum plumbum, cum turbido virore praecipitatur. Eodem acido facta mercurii

rii ſolutio cum phlegmate pariter turbatur, et poſtridie praecipitatum exhibet flaveſcens.

Oleum ſeorſim collectum odore empyreumatico; imo etiam urinoſo inſignitur; e phiala non obturata euolat urinoſum illud, et oleum ſimpliciter empyreuma ſpirat. Non omne per deſtillationem prodiiſſe oleum, etiam praeter illud quod retortae collo inhaerebat, reſidui inflamatio probat.

Vtriusque deſtillationis *reſiduum* carbonacea erat materia, leuis, nigra, fere inodora, Lichenum formas referens. In crucibulo leviter obtecto calcinatum diu cum flamma arſit, et in cineres nigros, quaſi carbonaceos vertebatur, cuius a prioris deſtillationis reſiduo (uncias ſeptem cum drachmis quinque pendente), uncia et quinque drachmae poſt calcinationem ſuperfuerunt. Ex his, lotione pulveris quartſoſi fere quatuor ſcrupuli ſeceſſerunt, qui Lichenibus ab arena volatili adhaeſiſſe videtur.

Lotos hoc modo cineres denuo per bihorium igne torſi; et ſic tamen, licet ex parte albeſcentibus particulis, immixtis tamen nigris, qui nondum omne phlogiſton exuerant, cineraſcebat, et pondus ſex cum dimidia drachmarum exhibuit. Hi tandem cineres aqua abluti et filtro ſeparati, ex eadem aqua evaporatione praebuerunt grana quinquaginta quinque Alcali vegetabilis, ſed nullum alieni ſalis veſtigium; ipſique cum acidis prompte efferveſcebant.

Vt terreum principium Lichenum aperto igne incineratorum examinarem, ſexdecim uncias ſiccatorum canденti

denti crucibulo ſenſim ingeſſi. Combuſtione lenta flammam albam, ſub continua crepitatione, exhibuerunt. Fumus a vulgari vegetabilium fumo nihil differebat. E candenti per integrum bihorium crucibulo prodiit *puluis* carbonaceus, a quo lotione ultra drachmam pulveris arenacei ſeceſſit, reſiduo unciam cum ſeptem drachmis aequante; e quo magnete artificiali aliquantum ferrearum particularum colligi potuit. Elixivatione tunc obtinui drachmam et duo ſcrupulos *Alcali fixi vegetabilis*, neque indicium ullum adfuit Salis muriatici, quod Cel. *Delius* (Diſſ. de Aethiope vegetabili Erlang. 4.) in Lichene islandico inveniſſe perhibet.

Eloti tandem *cineres* cum acidis ſtrenue fervebant, et in tribus unciis acidi nitroſi digeſti, calcareae terrae drachmas tres amiſerunt. Solutio ſic parata, inſtillata fere ad ſaturitatem ſolutioni ſalis tartari, limpida manſit, tum demum *Calx* inde ſub forma gelatinae praeceps facta eſt, quae poſt edulcorationem, ſimilis magneſiae, cum acidis omnibus fervens pondus drachmae cum quindecim granis tantum aequauit, reliqua parte in ſolutione relicta. Eadem ſolutio calcis Lichenum nec ab adfuſa aqua, neque aquis inſtillata praecipitationis ſigna dedit.

Terra, quae poſt extractam calcem remanſit, edulcorata ſesquidrachmae pondus effecit, nigricans, levis, inſipida. Huius ſemidrachma forti igne iterum calcinata, magis griſea evaſit, et particulis aliquot magneti adhaeſit. Tunc in igne fuſorio cum ſalis tartari drachma liquata et poſt ſemihoram in vitrum flaveſcens verſa fuit, quod poſtera die humeſcebat quidem, non tamen deliquium plena-

plenarium paſſum eſt, ſed colorem nigreſcentem induebat. Quo igitur ſilicea cinerum terra, praeter calcaream, ſatis manifeſta fuit.

* * *

Volui etiam *Humum*, a putreſcentibus Lichenibus paraſiticis ſolis ortam, examinare. Ut igitur obtinerem puram, unciis viginti Lichenum variorum in olla figulina, obiter tecta, bullientem aquam affudi, et ollam loco tepido poſui, ſubinde curans, ut evaporata ſenſim aqua recenti reſtauraretur. Poſt alteram hebdomadem maſſa mucoſa facta, fermentationem aliquam ſubiiſſe viſa eſt, quod ſpumeſcens aqua et odor acidulus indicabant. Haec agitatio ſenſim requievit et odor ille minui coepit. Promovendae citius putrefactioni ſtudens, poſt tres menſes elapſos Lichenes iſtos lento igne per aliquot horas concoxi, ut in pulticulam fere redirent; dein priori loco repoſui, et poſt aliquot dies iterum in maſſa fermentatorium quendam motum, haud diu duraturum, obſervavi. Sexto menſe, poſtquam experimentum coeptum eſt, corruptio ſatis increverat, decimoque omnis Lichenum ſubſtantia in lutum vireſcens, fibroſum verſa videbatur, quod de die in diem magis terream induebat faciem, ita ut quarto decimo tandem menſe *Humus* nigra, fibris albidis mixta ſupereſſet.

Haec *Humus* in aëre facile ſiccari potuit, eratque nigerrima, moleculoſa, fibris flaveſcentibus, breviculis mixta, odore vappido ſubacido; pondus effecit ſex unciarum. Tubulo ferruminatorio obiecta, alba flammula exarſit,

arſit, cum empyrevmatico foetore nequaquam urinoſo. Sic primum in carbonem, dein verſa eſt in cineres leves, gryſeos.

Humus eadem contrita et humectata, ſimilis eſt hortenſi humo pinguiſſimae; in ore mucoſa, ſalivam flavo tingit, et ſubacidum guſtum excitat. Eiusdem uncia in aqua cocta, flaventem reddit, reſiduo terreo relicto; filtrata autem et evaporata aqua pelliculam multicolorem exhibet et ſubacido-paludoſa indole natum et linguam afficit. Decoctum affuſa ſolutione ſalis Tartari turbatur, et flavum praebet ſedimentum, ſine ullo ſalis eſſentialis indicio. Evaporatione penitus exhauſta aqua reliquit drachmas duas extracti ſicci, nigri, amari, quod in ore paulo mucilaginoſum evadit, et aqua ad conſiſtentiam ſyrupi dilutam, per quatuor menſes, quos repoſitum fuit, nihil ſalini ſecreuit.

Humus Lichenum ad tres uncias deſtillatione e retorta ſicca, balneo arenae commiſſa, dedit:

1) Phlegma limpidum, inſipidum, odoris terrei, trium drachmarum pondere.

2) Phlegma flaueſcens empyreumaticum, pondere unciae mediae et drachmae ſemis.

3) Oleum empyreumaticum cum iſto phlegmate et poſt illud, primum flauo, deinde nigro colore expulſum, cuius ſemuncia et drachma ſepari potuit, praeter inſignem ſatis copiam in retortae collo reſidem.

 4) Ca-

4) Caput mortuum deſtillationis carbonaceum pondus unciae et drachmarum ſesquitrium explevit.

Phlegma empyreumaticum ex hac deſtillatione plane, vt a recentibus Lichenibus productum; eiusdem quoque naturae fuit Oleum empyreumaticum. Sed huius copia maior, dum e libra civili terrae, uncia olei prodiret. Si ergo a territicatione artificiali Lichenum concludere liceat ad formationem Turfae et Carbonum foſſilium, quorum vegetabilis natura apparet, ſequeretur vegetabilia terrificata ipſa tantam oleoſi principii abundantiam evolutione ex ſe ſuppeditare poſſe, quantam in iſtis foſſilibus invenimus; neque longe quaerendam eſſe Petrolei originem, cuius explicationes ſolitae variis alioquin difficultatibus impeditae ſunt. In locis, ubi Petroleum ſcaturit, illud vero ſimillime ex foſſilibus bituminoſis, ope caloris per pyrites alitervi excitati, prodiit; ſaltem in peninſula illa Maris caſpii, quae Petrolei ſeu Naphthae fontibus celebris, et cuius ſolum in vicinia adeo calet, ut terra ubique Petrolei vapores emittat, flammae alendae aptos.

Reſiduum a deſtillata terra Lichenum erat leve, nigrum, moleculoſum, ex parte ſplendidum, inſipidum, empyrevmate parum odoratum. In crucibulo aperta ignitione flammam haud diu duraturam edidit; et poſt trium fere horarum calcinationem redactum fuit ad pondus unciar. ſeptem cum ſcrupulo uno. Erat nunc cinis ſubgryſeus, paulo ponderoſus, inſipidus, e quo magnete haud parum particularum martialium educere potui, quique aquam cum ſibilo quodam ſorpſit.

Solu-

Solutione grana circiter novem Salis fuſceſcentis, ſquamoſi inde eduxi; quot iterata ſolutione depuratum, viridem rectorem cum violarum ſyrupo et cum acidis omnibus efferveſcentiam promptam excitabat. Argentum acido nitri ſolutum ab eo dejicitur albo colore; ſolutio frigida eiusdem mercurium eodem acido ſolutum, flauo, calida autem ſolutio colore fulvo praecipitat. Prunis inſperſum idem ſal nec intumeſcit, neque crepitat, ſed ſulphureum aliquem odorem inde ſubolfeci. Tincturae gallarum mixtus nigredinem aliquam eidem conciliabat.

Supererat vt uncias duas terrae Lichenum crudae calcinarem. Crucibulo ignito ingeſta ſatis diu cum alba flamma arſit, nec quidquam intumvit, et poſt diuturnam calcinationem reliquit cineres gryſeos, particulis ſatis groſſis mixtos, trium drachmarum pondere; e quibus prodiere grana novem ſalis, quod ſimillimum fuit illi e diſtillationis reſiduo eloto.

Terra mortua tam a deſtillationis, quam a calcinationis reſiduo eloto ſuperſtes, cum aqua forti equidem acriter ferveſcebat, attamen ſaltim quoad partem ſolvebatur. Quod ſupererat edulcoratum, vitrificatione, cum ſale tartari ſiliceam indolem prodebat; in quo pulvis arenae volatilis, Lichenibus adhaerens, partes ſuas agere videtur.

Ut igitur experimentorum conſectaria hic in fine colligam: E libra ſexdecim unciarum Lichenum paraſiticorum, in aëre ſiccatorum prodire debent:

1) *Subſtantiae mucilaginoſae*, ſub ſpecie gummi ſiccatae, adusque uncias vij.

 2) *Reſi-*

2) *Reſinae vegetabilis* fere uncia 1. drachmae 3.

3) *Phlegmatis inſipidi* ad ſesqui-unciam.

4) *Phlegmatis empyreumatici* cum evidenti acido vegetabili, ad uncias tres cum dimidia.

5) Deſtillatione ſicca, *olei empyreumatici* ſeparabilis, circiter drachmae ſex:

6) Cineres combuſtorum Lichenum ex eadem quantitatae largiuntur.

7) Salis alcalini fixi vegetabilis drachmam 1. cum ſcrupulis 2.

8) Ceterum ad duas tertias terra calcarea.

9) Tertia parte terrae ſiliceae conſtant.

Humus putrefactione vnius librae Lichenum paranda, pondus quinque unciarum cum tribus drachmis aequat;

Ex eaque ſicca deſtillatione

1) Olei empyreumatici ſeparabilis prodit ad minimum uncia.

2) Eadem combuſta in carbone continet Alcali fixi circiter grana XXV.

3) Tandemque, poſt calcinationem et delixivationem, terrae calcareae atque ſiliciae ſesquiunciam fere praebet.

Ex omnibus patet Lichenes, praeter incertum Alcali volatilis veſtigium, principia omnino vegetabilium reliquorum analoga per chemicam analyſin largiri.

ASTRO-

ASTRONOMICA.

CAVTIONES NECESSARIAE
IN
DETERMINATIONE MOTVS PLANETARVM OBSERVANDAE.

Auctore
L. EVLERO.

§. 1.

Cum in Tomo XX nouor. Comm. oſtendiſſem, accuratam cognitionem perturbationum, quas duo planetae ob actionem mutuam ſibi inferunt, ſperari non poſſe, niſi eorum motus ad planum aliquod fixum in coelo referantur, cuius reſpectu poſitio orbitarum et inclinatio ad quoduis tempus inueſtigari debeat: ſtatim ab initio motus planetarum ad tale planum fixum in coelo ſum relaturus, pro quo aſſumam planum illud, quod orbita terrae initio huius ſaeculi, ſeu anno 1700 in coelo obtinuit, quod ergo plano tabulae repraeſentetur, in quo punctum S ſit centrum ſolis et recta SA ad punctum aequinoctiale vernum iſtius epochae directa, quam ergo tanquam fixam ſpectare poterimus. Tum vero

vero in eodem plano ducamus rectam SB, illi normalem, quae ad punctum ſolſtitiale aeſtiuum huius epochae dirigatur, ita vt ordo ſignorum coeleſtium ab A verſus B progredi ſit cenſendus. Tertio vero ſtatuatur etiam perpendiculariter ad planum recta SC ſeptentrionem verſus ſpectans, ita vt hae tres rectae SA, SB et SC exhibeant ternas directrices fixas, iuxta quas motum planetarum ſecundum principia mechanicae ſum inueſtigaturus.

§. 2. Quanquam autem praecepta, quae ſum traditurus, ad omnes planetas aeque pertinere debent: tamen ea hic potiſſimum ad ambos planetas Iouem et Saturnum accommodabo; quoniam eorum motus etiamnunc in Aſtronomia maxime deſideratur, quandoquidem inde facillime applicatio ad binos quosuis alios planetas fieri poterit. Conſtituta igitur certa epocha temporis fixa, a qua motum vtriusque planetae ſumus proſecuturi, elapſo inde tempore $= t$, reperiatur centrum Iouis in puncto Z, Saturni vero in z, vnde primo ad planum tabulae demittantur perpendicula ZY et zy; tum vero ex punctis Y et y ad rectam fixam SA agantur normales YX et yx, vt locus vtriusque planetae per ternas coordinatas orthogonales determinetur, quas ſequenti modo denominemus:

$$SX = X, \quad XY = Y, \quad YZ = Z$$

$$Sx = x, \quad xy = y, \quad yz = z$$

Praeterea vero breuitatis gratia ponamus diſtantim a Sole

$$SZ = \surd(X^2 + Y^2 + Z^2) = V \text{ et } Sz = \surd(xx + yy + zz) = v$$

denique vero diſtantiam inter binos planetas

$$Zz = \surd(x - X)^2 + (y - Y)^2 + (z - Z)^2 = w.$$

§. 3.

§. 3. Cum iam maſſae, tam Solis quam ambo-rum planetarum, praecipue in computum duci debeant: ſit maſſa Solis $= \odot$, maſſa Iouis $= ♃$ et maſſa Saturni $= ♄$. His poſitis vires, quibus tam Sol quam planetae ſe mutuo attrahunt, ſequenti modo exhibeantur:

Pro Ioue, vis ad Solem directa ſecundum $ZS = \frac{\odot}{v^2}$,
ad Saturnum vero ſecundum $Zz = \frac{♄}{w^2}$.

Pro Saturno, vis ad Solem directa ſecundum $zS = \frac{\odot}{v v'}$,
ad Iouem vero ſecundum $zZ = \frac{♃}{w^2}$.

Pro ipſo Sole, vis ad Iouem directa ſecundum $SZ = \frac{♃}{v^2}$
ad Saturnum vero ſecundum $Sz = \frac{♄}{v v'}$.

Hic enim nondum curamus menſuras abſolutas harum virium, quas deinceps demum occurate aſſignabimus.

§. 4. Quoniam autem inſtitutum noſtrum poſtulat vt centrum Solis tanquam fixum in ſuo loco ſpectemus, vires, quibus ipſe ſol ad ambos planetas ſollicitatur, ſecundum directionem contrariam in vtrumque planetam transferri oportet; vnde primo quidem Iupiter ſollicitabitur ab his quatuor viribus:

I. vi ſecundum $ZS = \frac{\odot}{v^2}$.
II. vi ſecundum $Zz = \frac{♄}{w w}$.
III. vi ſecundum $ZS = \frac{♃}{v^2}$.
IV. vi ſecundum $zS = \frac{♄}{v v'}$.

Saturnus autem his quatuor viribus ſollicitabitur:

I. vi ſecundum $zS = \frac{\odot}{vv}$.
II. vi ſecundum $zZ = \frac{\text{♃}}{ww}$.
III. vi ſecundum $zS = \frac{\text{♄}}{vv}$.
IV. vi ſecundum $ZS = \frac{\text{♃}}{V^2}$.

Has iam vires ſecundum ternas noſtras directiones fixas SA, SB, SC reſolui oportet, vnde pro Ioue habebimus ſequentes ternas vires:

I. vis ſecundum $XS = \frac{\odot X}{V^3} - \frac{\text{♄}(x-X)}{w^3} + \frac{\text{♃}X}{V^3} + \frac{\text{♄}x}{v^3}$.
II. vis ſecundum $YX = \frac{\odot Y}{V^3} - \frac{\text{♄}(y-Y)}{w^3} + \frac{\text{♃}Y}{V^3} + \frac{\text{♄}y}{v^3}$.
III. vis ſecundum $ZY = \frac{\odot Z}{V^3} - \frac{\text{♄}(z-Z)}{w^3} + \frac{\text{♃}Z}{V^3} + \frac{\text{♄}z}{v^3}$.

ternae autem vires, quibus Saturnus ſecundum easdem directiones vrgebitur, erunt

I. vis ſecundum $xS = \frac{\odot x}{v^3} + \frac{\text{♃}(x-X)}{w^3} + \frac{\text{♄}x}{v^3} + \frac{\text{♃}X}{V^3}$.
II. vis ſecundum $yx = \frac{\odot y}{v^3} + \frac{\text{♃}(y-Y)}{w^3} + \frac{\text{♄}y}{v^3} + \frac{\text{♃}Y}{V^3}$.
III. vis ſecundum $zy = \frac{\odot z}{v^3} + \frac{\text{♃}(z-Z)}{w^3} + \frac{\text{♄}z}{v^3} + \frac{\text{♃}Z}{V^3}$.

His ſcilicet ternis viribus motus vtriusque planetae, ſecundum easdem directiones SA, SB, SC reſolutus, retardabitur.

§. 5. Quod ſi autem motus Iouis ſecundum has directiones reſoluatur, primo eius ternae celeritates erunt: 1) Secundum $SA = \frac{dX}{dt}$. 2) ſec. $SB = \frac{dY}{dt}$. 3) ſec. $SC = \frac{dZ}{dt}$, hincque accelerationes ſecundum easdem directiones, ſumto elemento temporis dt conſtante:
1) ſec. $SA = \frac{ddX}{dt^2}$. 2) ſec. $SB = \frac{ddY}{dt^2}$. 3) ſec. $SC = \frac{ddZ}{dt^2}$.

Simili

Simili modo pro Saturno ternae eius celeritates erunt:

1) ſec. S A $= \frac{dx}{dt}$. 2) ſec. S B $= \frac{dy}{dt}$. 3) ſec. S C $= \frac{dz}{dt}$,

et accelerationes:

1) ſec. S A $= \frac{ddx}{dt^2}$. 2) ſec. S B $= \frac{ddy}{dt^2}$. 3) ſec. S C $= \frac{ddz}{dt^2}$.

His igitur accelerationibus vires ante inuentae ſecundum easdem directiones, mutatis ſignis, proportionales ſunt ſtatuendae.

§. 6. Quia circa menſuras abſolutas nihil adhuc eſt conſtitutum, hanc proportionalitatem tantiſper littera Γ deſignemus, hoc modo pro motu Iouis habebimus tres ſequentes aequationes:

$$\text{I.)}\ \Gamma \frac{ddX}{dt^2} = -\frac{(\odot + ♃)X}{V^3} + \frac{♄(x - X)}{w^3} - \frac{♄ x}{v^3}.$$

$$\text{II.)}\ \Gamma \frac{ddY}{dt^2} = -\frac{(\odot + ♃)Y}{V^3} + \frac{♄(y - Y)}{w^3} - \frac{♄ y}{v^3}.$$

$$\text{III.)}\ \Gamma \frac{ddZ}{dt^2} = -\frac{(\odot + ♃)Z}{V^3} + \frac{♄(z - Z)}{w^3} - \frac{♄ z}{v^3}.$$

Parique modo Saturni motus his tribus aequationibus definietur:

$$\text{I.)}\ \Gamma \frac{ddx}{dt^2} = -\frac{(\odot + ♄)x}{v^3} - \frac{♃(x - X)}{w^3} - \frac{♃ X}{V^3}.$$

$$\text{II.)}\ \Gamma \frac{ddy}{dt^2} = -\frac{(\odot + ♄)y}{v^3} - \frac{♃(y - Y)}{w^3} - \frac{♃ Y}{V^3}.$$

$$\text{III.)}\ \Gamma \frac{ddz}{dt^2} = -\frac{(\odot + ♄)z}{v^3} - \frac{♃(z - Z)}{w^3} - \frac{♃ Z}{V^3}.$$

In his igitur ſex aequationibus differentio-differentialibus omnia plane continentur, quibus non ſolum motus vtriusque planetae, ſed etiam poſitio orbitarum earumque mutatio determinatur.

Reductio omnium quantitatum in has aequationes ingredientium ad menſuras abſolutas.

§. 7. Quo autem ex his aequationibus quantitatem in ſe indefinitam Γ, quippe quae pendet a menſuris, quibus reliquas quantitates metiri lubet, ex calculo elidamus, omnes quantitates, quae in noſtras aequationes ſunt introductae, ad menſuras certas ac determinatas reuocari oportet. Ac primo quidem pro quantitatibus, quibus diſtantiae deſignantur, menſuram accipiamus diſtantiam mediam terrae a ſole, quam propterea vnitate denotabimus; deinde vero pro tempore t definiendo vtamur menſura vnius diei, quippe quae ad praeſens inſtitutum magis erit adcommodata, quam ſi, more in problematibus mechanicis recepto, id in minutis ſecundis exprimere vellemus. Vt igitur noſtras formulas ad iſtas menſuras reducamus, conſideremus motum terrae medium circa ſolem, quae ergo deſcriptura eſſet interuallo vnius anni circa ſolem circulum, cuius radius $= 1$, in quo quotidie percurſura eſſet certum ac determinatum angulum, cuius quantitatem ex tabulis ſolaribus depromere oportet, quem idcirco hic accuratiſſime definiri conuenit. Praebent autem iſtae tabulae pro tempore 30 dierum motum terrae medium $29^\circ.\ 34'.\ 4''.\ 54'''$, quem angulum ſeu arcum in partes radii, qui eſt $= 1$, conuerti oportet. Hunc in finem primo reducatur hic arcus ad minuta ſecunda, quorum numerus eſt 106445; quare cum ſemiperipheria circuli ſit $= 3{,}14159265$, eaque contineat $180.\ 60.\ 60$ minuta ſecunda $= 648000''$, fiat $648000 : 3.14159265 = 106445$ ad $0{,}5148731$, cuius fractionis decimalis pars trigeſima dabit arcum, quem terra motu medio in ſuo circulo percurret, qui ergo erit $0{,}01716243$.

§. 8.

§. 8. Nunc igitur hunc motum terrae medium per ſimiles formulas analyticas ex principiis mechanicis deductas exprimamus, quas facile ex formilis pro Ioue inventis deducemus, omiſſa perturbatione a Saturno orta; quoniam in hoc terrae motu nullam perturbationem agnoſcimus. Hinc loco Iouis terram ſubſtituentes habebimus $V = 1$, et quia terra in ipſo plano fixo moueri cenſetur, erit $Z = 0$, ita vt motus terrae his duabus formulis contineatur:

$$\frac{\Gamma d d X}{d t^2} = - \odot X \text{ et } \frac{\Gamma d d Y}{d t^2} = - \odot Y.$$

Ponamus nunc terram tempore t dierum motu vniformi percurrere angulum $\Phi = 0,01716243\, t$, ſicque erit

$$X = \text{coſ.}\, \Phi \text{ et } Y = \text{ſin.}\, \Phi,$$

vnde colligitur:

$$d X = - d \Phi \,\text{ſin.}\, \Phi \text{ et } d Y = d \Phi \,\text{coſ.}\, \Phi,$$

hincque porro, ob $d \Phi$ conſtans, erit

$$d d X = - d \Phi^2 \,\text{coſ.}\, \Phi \text{ et } d d Y = - d \Phi^2 \,\text{ſin.}\, \Phi;$$

quibus valoribus ſubſtitutis habebimus:

$$\Gamma \frac{d \Phi^2 \,\text{coſ.}\, \Phi}{d t^2} = \odot \,\text{coſ.}\, \Phi, \text{ ſiue } \Gamma = \frac{\odot d t^2}{d \Phi^2}, \text{ vbi erit}$$

$$\frac{d t}{d \Phi} = \frac{1}{0,01716243}.$$

Ponamus igitur breuitatis gratia $0,01716243 = \delta$, vt fiat

$$\frac{d t}{d \Phi} = \frac{1}{\delta} \text{ et } \Gamma = \frac{\odot}{\delta \delta},$$

quo valore inuento, ſi omnes quantitates per menſuras modo ſtabilitas exprimamus, aequationes pro motu Iouis et Saturni inuentae, ſi per $\Gamma = \frac{\odot}{\delta \delta}$ diuidantur, ſequentes induent formas:

Pro Ioue

$$\frac{ddX}{dt^2} = -\frac{\delta\delta(\odot + \text{♃})X}{\odot V^3} + \frac{\delta\delta\text{♄}(x - X)}{\odot w^3} - \frac{\delta\delta\text{♄}x}{\odot v^3},$$

$$\frac{ddY}{dt^2} = -\frac{\delta\delta(\odot + \text{♃})Y}{\odot V^3} + \frac{\delta\delta\text{♄}(y - Y)}{\odot w^3} - \frac{\delta\delta\text{♄}y}{\odot v^3},$$

$$\frac{ddZ}{dt^2} = -\frac{\delta\delta(\odot + \text{♃})Z}{\odot V^3} + \frac{\delta\delta\text{♄}(z - Z)}{\odot w^3} - \frac{\delta\delta\text{♄}z}{\odot v^3}.$$

Pro Saturno

$$\frac{ddx}{dt^2} = -\frac{\delta\delta(\odot + \text{♄})x}{\odot v^3} - \frac{\delta\delta\text{♃}(x - X)}{\odot w^3} - \frac{\delta\delta\text{♃}X}{\odot V^3},$$

$$\frac{ddy}{dt^2} = -\frac{\delta\delta(\odot + \text{♄})y}{\odot v^3} - \frac{\delta\delta\text{♃}(y - Y)}{\odot w^3} - \frac{\delta\delta\text{♃}Y}{\odot V^3},$$

$$\frac{ddz}{dt^2} = -\frac{\delta\delta(\odot + \text{♄})z}{\odot v^3} - \frac{\delta\delta\text{♃}(z - Z)}{\odot w^3} - \frac{\delta\delta\text{♃}Z}{\odot V^3}.$$

§. 9. Ponamus nunc $\delta\delta = \Delta$, ita vt ſit $\Delta = 0,0002945493$ et $l\Delta = 6,4691580$; praeterea vero ſtatuamus $\frac{\text{♃}}{\odot} = M$ et $\frac{\text{♄}}{\odot} = m$, quibus valoribus introductis aequationes noſtrae ita ſe habebunt:

Pro Ioue

$$\frac{ddX}{\Delta dt^2} = -\frac{(1 + M)X}{V^3} + \frac{m(x - X)}{w^3} - \frac{mx}{v^3},$$

$$\frac{ddY}{\Delta dt^2} = -\frac{(1 + M)Y}{V^3} + \frac{m(y - Y)}{w^3} - \frac{my}{v^3},$$

$$\frac{ddZ}{\Delta dt^2} = -\frac{(1 + M)Z}{V^3} + \frac{m(z - Z)}{w^3} - \frac{mz}{v^3}.$$

Pro Saturno

$$\frac{ddx}{\Delta dt^2} = -\frac{(1 + m)x}{v^3} - \frac{M(x - X)}{w^3} - \frac{MX}{V^3},$$

$$\frac{ddy}{\Delta dt^2} = -\frac{(1 + m)y}{v^3} - \frac{M(y - Y)}{w^3} - \frac{MY}{V^3},$$

$$\frac{ddz}{\Delta dt^2} = -\frac{(1 + m)z}{v^3} - \frac{M(z - Z)}{w^3} - \frac{MZ}{V^3}.$$

Vbi ſecundum mentem *Newtoni* valores litterarum M et m ita ſunt aſſignati, vt ſit $M = \frac{1}{1067}$ et $m = \frac{1}{3021}$; vnde patet

tet, partes poſteriores harum aequationum, quae perturbationes continent, prae prioribus eſſe vehementer exiguas.

§. 10. His igitur aequationibus conſtitutis, quae iam omnibus numeris ſunt determinatae, totum negotium huc redit, vt ad quoduis tempus, ab epocha fixa elapſum, quod ſit aequale t diebus, quantitates lineares X, Y, Z et x, y, z definiantur: iis enim inuentis ad tempus propoſitum locus vtriusque planetae reſpectu ternorum axium fixorum S A, S B, S C, accurate aſſignari poterit. Inde etiam innoteſcent formulae

$$\frac{dX}{dt},\ \frac{dY}{dt},\ \frac{dZ}{dt}\ \text{et}\ \frac{dx}{dt},\ \frac{dy}{dt},\ \frac{dz}{dt},$$

quibus celeritates vtriusque planetae ſecundum easdem directiones ita definiuntur, vt iis ſpatia indicentur, quae his celeritatibus interuallo vnius diei percurri poſſent.

De quantitatibus conſtantibus, per quas integrationes inſtituendae determinari debent.

§. 11. Quoniam amborum planetarum motus per ſex aequationes differentiales ſecundi gradus exprimuntur, ſi ſingulas bis integrare liceret, in aequationes integrales completas ingrederentur duodecim conſtantes arbitrariae, quas ergo ex ſtatu initiali, ſeu motu, qui vtrique initio fuerit impreſſus, determinari oportebit, vnde etiam duodecim determinationes orientur. Quia enim primo locus, quem vterque planeta initio in coelo occupauit, pro cognito eſt habendus, ternae coordinatae datos obtinebunt valores. Deinde quia motus vtrique planetae impreſſus etiam vt cognitus ſpectatur, ternae celeritates, quae inde ſecun-

ſecundum directiones fixas SA, SB, SC naſcuntur, erunt cognitae, ita vt harum determinationum numerus quoque ad duodecim aſſurgat.

§. 12. Ponamus ergo initium ibi capi, vbi erat $t = 0$, ac valores noſtrarum quantitatum, quae in aequationes ingrediuntur, initio, vbi $t = 0$, ſequenti modo determinatos fuiſſe, vt tum fuiſſet

$$X = A, \; Y = B, \; Z = C; \; x = a, \; y = b, \; z = c;$$
$$\frac{dX}{dt} = A', \; \frac{dY}{dt} = B', \; \frac{dZ}{dt} = C'; \; \frac{dx}{dt} = a', \; \frac{dy}{dt} = b', \; \frac{dz}{dt} = c'.$$

His igitur duodecim conſtantibus definitis duplex integratio omnium noſtrarum aequationum ad aequationes integrales determinatas perducet, quibus natura vtriusque motus pro omnibus temporibus exprimetur.

De motu regulari, quo vterque Planeta remota actione eſſet progreſſurus.

§. 13. Quoniam perturbationes, quas ambo planetae ſibi mutuo inducunt, clarius et diſtinctius repraeſentare non licet, quam ſi eae cum motu regulari, quo vterque planeta, ſi nullam pateretur perturbationem, eſſet progreſſurus, comparentur et aberratio veri motus ad quodvis tempus aſſignetur: hanc ob rem ante omnia actionem mutuam planetarum ſeponamus, et motum inueſtigemus, quo tum vterque planeta ob motum initio impreſſum eſſet progreſſurus. Quanquam enim hoc problema iam ſaepiſſime variis modis eſt ſolutum: tamen, quia hic motum tribus coordinatis definiri aſſumimus, dum vulgo calculus tantum ad duas reſtringitur, operae vtique pretium erit, hanc analyſin ad ternas coordinatas extendere, ac per ſta-

tum

tum initialem determinare, vbi quidem ſufficiet alterius tantum motum inueſtigaſſe, quem in finem hic motum Saturni eligamus, quoniam eius elementa litteris minuſculis indicauimus.

§. 14. Reiectis igitur in aequationibus inuentis iis membris, quae ex perturbatione mutua naſcuntur, ſi loco $\Delta(1+m)$ ſcribamus breuitatis gratia n: motus Saturni regularis his tribus aequationibus exprimetur:

$$\text{I. } \frac{ddx}{dt^2} = -\frac{nx}{v^3}. \quad \text{II. } \frac{ddy}{dt^2} = -\frac{ny}{v^3}. \quad \text{III. } \frac{ddz}{dt^2} = -\frac{nz}{v^3},$$

vnde ſtatim ſequentes formemus combinationes:

$$\text{I. } \frac{yddx - xddy}{dt^2} = 0.$$

$$\text{II. } \frac{zddy - yddz}{dt^2} = 0.$$

$$\text{III. } \frac{xddz - zddx}{dt^2} = 0.$$

quae ſingulae ſunt integrabiles, earumque integralia per ſtatum initialem determinata ſequenti modo reperientur expreſſa:

$$\text{I. } \frac{ydx - xdy}{dt} = ba' - ab'.$$

$$\text{II. } \frac{zdy - ydz}{dt} = cb' - bc'.$$

$$\text{III. } \frac{xdz - zdx}{dt} = ac' - ca'.$$

Sicque iam adepti ſumus tres aequationes primi gradus differentiales, ex quibus inſignia ſymptomata motus deriuare licebit, quanquam totam ſolutionem non exhauriunt; quia littera n, conditionem praecipuam motus inuoluens, in eas non ingreditur, id quod inde etiam patet, quod formulae differentio-differentiales, vnde ſunt natae, ita ſunt comparatae, vt binae tertiam iam inuoluant ideoque tantum pro duabus ſint habendae.

§. 15. Has tres aequationes modo inuentas ita combinemus, vt primam per z, ſecundam per x ac tertiam per y multiplicemus, tum enim earum ſumma praebebit hanc aequationem;

$$o = (b\,a' - a\,b')\,z + (c\,b' - b\,c')\,x + (a\,c' - c\,a')\,y,$$

in qua coordinatae x, y, z, tantum vnicam dimenſionem occupant; vnde concludimus omnia puncta z in eodem plano fore ſita, cuius ergo inclinationem ad planum noſtrum fixum A S B, ſimulque interſectionem asſignari conueniet.

T. XVIII. Fig. 2 §. 16. Sit igitur punctum z in iſto plano quod quaerimus, exiſtentibus coordinatis $S\,x = x$, $x\,y = y$, $y\,z = z$, ita vt ſit vti inuenimus:

$$(b\,a' - a\,b')\,z + (c\,b' - b\,c')\,x + (a\,c' - c\,a')\,y = o;$$

ſitque recta S ☊ interſectio huius plani cum plano tabulae A S B, ſecans ordinatam $x\,y$ in puncto o, et quia in hac recta S ☊ ordinatae z debent euaneſcere, pro poſitione huius rectae hanc habebimus aequationem:

$$(c\,b' - b\,c')\,x + (a\,c' - a\,c')\,y = o,$$

vbi iam y denotat applicatam $x\,o$, manente $S\,x = x$; vnde cum ſit $y = \frac{(b\,c' - c\,b')\,x}{a\,c' - c\,a'}$, ex hac aequatione, cum poſito $x = o$ fiat etiam $y = o$, intelligimus, rectam S ☊ per ipſum punctum S, ſeu centrum ſolis tranſire, ita vt, quod quidem eſt notiſſimum, orbita planetae per ſolem tranſeat. Ponamus iam angulum A S ☊ $= \zeta$, qui ergo longitudinem huius lineae nodorum, a puncto aequinoctiali verno A, ſecundum ordinem ſignorum A B ſumtam, indicabit.

§. 17.

§. 17. Cum igitur fractio $\frac{x\,o}{S}$ tangentem huius anguli ζ exprimat, erit tang. $\zeta = \frac{y}{x} = \frac{b\,c' - c\,b'}{a\,c' - c\,a'}$. Pro inclinatione autem inuenienda ſumamus $x = o$, et noſtra aequatio euadet $(b\,a' - a\,b')\,z + (a\,c' - c\,a')\,y = o$, vnde fit

$$z = \frac{(c\,a' - a\,c')\,y}{b\,a' - a\,b'}.$$

Sit igitur $S\,p = y$ et $p\,q = z$; tum vero ex p ad lineam nodorum S ☊ ducatur normalis $p\,r$, iungaturque recta $q\,r$, ac manifeſtum eſt angulum $p\,r\,q$ metiri inclinationem orbitae planetae ad planum noſtrum fixum A S B, cuius ergo tangens erit $\frac{p\,q}{p\,r}$. Cum autem ſit angulus

$$p\,S\,☊ = 90 - \zeta,\ \text{erit}\ p\,r = y\ \text{coſ.}\ \zeta,$$

ideoque tangens inclinationis $= \frac{z}{y\ \text{coſ.}\ \zeta}$. Quod ſi ergo hanc inclinationem $p\,r\,q$ ſtatuamus $= \eta$, loco z ſcribendo ſuum valorem habebimus

$$\text{tang.}\ \eta = \frac{(c\,a' - a\,c')}{(b\,a' - a\,b')\ \text{coſ.}\ \zeta}.$$

§. 18. Ex ſtatu igitur initiali planetae, qui litteris a, b, c, et a', b', c', continetur, ſtatim innoteſcit interſectio orbitae planetae cum plano noſtro fixo A S B, ſiue angulus A S ☊ $= \zeta$, ſimulque inclinatio orbitae ad hoc planum, ſeu angulus $p\,r\,q = \eta$, quandoquidem inuenimus has formulas:

$$\text{tang.}\ \zeta = \frac{b\,c' - c\,b'}{a\,c' - c\,a'}\ \text{et tang.}\ \eta = \frac{c\,a' - a\,c'}{(b\,a' - a\,b')\ \text{coſ.}\ \zeta}.$$

Quoniam ſupponimus planetam ab A verſus B promoveri, poſtquam per lineam nodorum S ☊ tranſiit, in regionem borealem aſcendit, et recta S ☊ ad nodum aſcendentem dirigetur, ſiquidem formula pro tang. ζ inuenta fuerit poſitiua, ſimulque altera formula tang. η etiam poſitiua,

 quippe

quippe ad quem caſum noſtra figura eſt accommodata, vnde iudicium haud difficulter inſtituetur, ſi ſecus euenerit.

§. 19. Cum ſit tang. $\zeta = \frac{b c' - c b'}{a c' - c a'}$ erit

$$\text{coſ.}\ \zeta = \frac{a c' - c a'}{\sqrt{((b c' - c b')^2 + (a c' - c a')^2)}},$$

quo valore in altera formula ſubſtituto prodibit

$$\text{tang.}\ \eta = \frac{\sqrt{((b c' - c b') + (a c' - c a')^2)}}{a b' - b a'};$$

praecedens vero formula vtique eſt commodior, quoniam, poſtquam angulus ζ fuerit inuentus, inde facilius angulus η concluditur.

§. 20. Vt autem indolem ipſius orbitae inueſtigemus, aequationibus differentio-differentialibus primo exhibitis erit vtendum. Primam igitur per $2\,dx$, ſecundam per $2\,dy$ ac tertiam per $2\,dz$ multiplicando, ſumma dabit hanc aequationem:

$$\frac{2\,dx\,ddx + 2\,dy\,ddy + 2\,dz\,ddz}{dt^2} = -2\,n\,\frac{(x\,dx + y\,dy + z\,dz)}{v^3},$$

Hinc igitur, quia

$$vv = xx + yy + zz, \text{ ideoque } x\,dx + y\,dy + z\,dz = v\,dv,$$

ob elementum dt conſtans elicietur integrando

$$\frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{dt^2} = + \frac{2n}{v} + C.$$

Pro conſtante igitur determinanda faciamus

$$x = a,\ y = b,\ z = c;\ \frac{dx}{dt} = a',\ \frac{dy}{dt} = b',\ \frac{dz}{dt} = c',$$

tum vero fiat diſtantia $v = d$, ita vt ſit

$$d = \sqrt{(aa + bb + cc)},$$

quo facto noſtra aequatio fiet

$$a'a' + b'b' + c'c' = \frac{2n}{d} + C, \text{ vnde fit}$$

$$C = a'a' + b'b' + c'c' - \frac{2n}{d}.$$

Sicque

Sicque aequatio noſtra inuenta erit

$$\frac{dx^2+dy^2+dz^2}{dt^2}=2n\left(\frac{1}{v}-\frac{1}{d}\right)+a'a'+b'b'+c'c'.$$

Quod ſi ergo breuitatis gratia ponamus

$a'a'+b'b'+c'c'=\delta\delta$, erit

$$\frac{dx^2+dy^2+dz^2}{dt^2}=2n\left(\frac{1}{v}-\frac{1}{d}\right)+\delta\delta,$$

quae aequatio alias ex principio virium vivarum deduci ſolet.

§. 21. Praeter tres igitur aequationes differentiales primi gradus nunc nacti ſumus quartam eiusdem gradus, quae autem iunctim ſumtae tantum tribus aequivalere ſunt cenſendae, ideoque totam ſolutionem in ſe complectuntur. Sin autem ex his aequationibus primi gradus coordinatas x, y, z eliminare, eamrumque loco tantum diſtantiam a ſole v cum anomalia vera planetae introducere vellemus, in calculos taedioſiſſimos illaberemur. Hinc igitur denuo in nouam aequationem integralem inquiramus, ad quam ſequens nos artificium perducet.

§. 22. Incipiamus ergo iterum a ternis aequationibus principalibus, ac prima ducta in x, ſecunda in y, ac tertia in z et in ſummam collecta producunt hanc aequationem:

$$\frac{xddx+yddy+zddz}{dt^2}=-\frac{n(xx+yy+zz)}{v^3}=-\frac{n}{v}.$$

Ad hanc aequationem iam addamus modo ante inuentam et cum ſit $xddx+dx^2=d.xdx$; ſimulque

$$yddy+dy^2=d.ydy \text{ et } zddz+dz^2=d.zdz;$$

tum vero

$$xdx+ydy+zdz=vdv;$$

 aggre-

aggregatum harum aequationum euadet

$$\frac{d.\,v\,d\,v}{d\,t^2} = \frac{n}{v} - \frac{2\,n}{d} + \delta\,\delta,$$

vbi tantum ſumus lucrati, vt duas tantum quantitates variabiles hanc aequationem ingrediantur.

§. 23. Vt iam hanc aequationem integrabilem reddamus, multiplicemus eam per $2\,v\,d\,v$, quandoquidem hinc prodibit $\int 2\,v\,d\,v\,d.\,v\,d\,v = v\,v\,d\,v^2$, et aequatio integrata erit

$$\frac{v\,v\,d\,v^2}{d\,t^2} = 2\,n\,v - \frac{2\,n\,v\,v}{d} + \delta\,\delta\,v\,v + C,$$

quae conſtans inde debet definiri, quod initio, vbi $t = 0$ ſit $v = d$. At cum ſit

$$\frac{v\,d\,v}{d\,t} = \frac{x\,d\,x}{d\,t} + \frac{y\,d\,y}{d\,t} + \frac{z\,d\,z}{d\,t},$$ pro initio erit

$$d \times \frac{d\,v}{d\,t} = a\,a' + b\,b' + c\,c',$$

hincque

$$\frac{d\,v}{d\,t} = \frac{a\,a' + b\,b' + c\,c'}{d},$$ ideoque

$$\frac{v\,v\,d\,v^2}{d\,t^2} = (a\,a' + b\,b' + c\,c')^2.$$

His igitur valoribus ſubſtitutis aequatio ad ſtatum initialem accommodata erit

$$(a\,a' + b\,b' + c\,c')^2 = \delta\,\delta\,d\,d + C,$$

vnde prodit conſtans

$$C = (a\,a' + b\,b' + c\,c')^2 - \delta\,\delta\,d\,d,$$

conſequenter aequatio noſtra integrata ita ſe habebit:

$$\frac{v\,v\,d\,v^2}{d\,t^2} = 2\,n\,v - \frac{2\,n\,v\,v}{d} + \delta\,\delta\,v\,v + (a\,a' + b\,b' + c\,c')^2 - \delta\,\delta\,d\,d,$$

vbi eſt

$$(a\,a' + b\,b' + c\,c')^2 - \delta\,\delta\,d\,d =$$

$$2aba'b'+2aca'c'+2bcb'c'-aab'b'-aac'c'-bbc'c'$$
$$-bba'a'-cca'a'-ccb'b'$$

ſiue

$$(aa'+bb'+cc')^2-\delta\delta dd=-(ab'-ba')^2-(ac'-ca')^2-(bc'-cb')^2.$$

§. 24. Quo nunc hanc aequationem concinniorem reddamus, ſtatuamus breuitatis gratia:

$$ba'-ab'=\gamma,\ cb'-bc'=\alpha,\ ac'-ca'=\beta,$$

vnde formulae ſupra inuentae fiunt ſimpliciores, quoniam pro aequatione ad planum orbitae erit $\gamma z+\alpha x+\beta y=0$, hincque porro

$$\text{tang.}\,\zeta=-\tfrac{\alpha}{\beta}\ \text{et tang.}\,\eta=-\tfrac{\beta}{\gamma\,\text{coſ.}\,\zeta}.$$

Deinde vero aequatio modo inuenta induet hanc formam:

$$\tfrac{vv\,dv^2}{dt^2}=-\alpha\alpha-\beta\beta-\gamma\gamma+2nv-vv\left(\tfrac{2n}{d}-\delta\delta\right),$$

vnde deducimus:

$$dt^2=\frac{vv\,dv^2}{-\alpha\alpha-\beta\beta-\gamma\gamma+2nv-vv\left(\frac{2n}{d}-\delta\delta\right)},$$

in qua aequatione ambae variabiles v et t ſunt a ſe inuicem ſeparatae. Quemadmodum autem haec aequatio ad notiones in Aſtronomia receptas reduci queat deinceps clarius oſtendemus.

§. 25. Quo nunc ipſam orbitam huius planetae facilius definiamus, eam in plano tabulae repraeſentemus, vbi S ☊ ſit recta ad nodum aſcendentem directa, planeta autem hoc tempore verſetur in z, exiſtente eius diſtantia a ſole S $z=v$; tum vero ponamus angulum ☊ S $z=\Phi$, qui ergo praebet argumentum latitudinis planetae. Elapſo autem tempuſculo dt peruenerit planeta in z' et poſito ſpatiolo $zz'=ds$, ob T. XVIII. Fig. 3.

ob angulum $zSz' = d\Phi$ et $Sz' = v + dv$ erit

$$ds^2 = dv^2 + vv\,d\Phi^2.$$

Erit autem $ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$, et per priorem integrationem inuenimus

$$\frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{a\,t^2} = 2n\left(\frac{1}{v} - \frac{1}{d}\right) + \delta\delta,$$

hinc ergo erit

$$ds^2 = 2n\,dt^2\left(\frac{1}{v} - \frac{1}{d}\right) + \delta\delta\,dt^2,$$

vnde fit

$$vv\,d\Phi^2 = 2n\,dt^2\left(\frac{1}{v} - \frac{1}{d}\right) + \delta\delta\,dt^2 - dv^2.$$

Subſtituatur nunc hic loco dt^2 valor inuentus, ac reperietur

$$vv\,d\Phi^2 = \frac{(\alpha\alpha + \beta\beta + \gamma\gamma)\,dv^2}{-\alpha\alpha - \beta\beta - \gamma\gamma + 2nv - vv\left(\frac{2n}{d} - \delta\delta\right)},$$

hincque fiet

$$d\Phi = \frac{dv}{v}\sqrt{\frac{\alpha\alpha + \beta\beta + \gamma\gamma}{-\alpha\alpha - \beta\beta - \gamma\gamma + 2nv - vv\left(\frac{2n}{d} - \delta\delta\right)}},$$

quae aequatio cum priore, quae dat

$$dt = \frac{v\,dv}{\sqrt{-\alpha\alpha - \beta\beta - \gamma\gamma + 2nv - vv\left(\frac{2n}{d} - \delta\delta\right)}},$$

coniuncta, tam naturam orbitae, quam ipſum motum planetae complectitur.

§. 26. Conſideremus nunc formulam differentialem pro $d\Phi$ inuentam, ac ponamus breuitatis gratia

$$\frac{n}{\alpha\alpha + \beta\beta + \gamma\gamma} = F \text{ et } \frac{\frac{2n}{d} - \delta\delta}{\alpha\alpha + \beta\beta + \gamma\gamma} = G,$$

vt

vt habeamus

$$d\Phi \frac{-dv}{v\sqrt{(-1+2Fv-Gvv)}},$$

cui ſignum $-$ praefigimus, quoniam motum planetae ab aphelio ſumus proſecuturi, quo diſtantia v creſcente angulo Φ diminuitur. Nunc quo hanc formulam planiorem reddamus, ponamus $v=\frac{1}{u}$, eritque $-\frac{dv}{v}=+\frac{du}{u}$, ideoque

$$d\Phi=\frac{du}{\sqrt{(-uu+2Fu-G)}}.$$

Sit nunc porro $u=F-r$ et prodibit

$$d\Phi=\frac{-dr}{\sqrt{(FF-G-rr)}},$$

cuius integrale manifeſto eſt arcus circuli, cuius coſinus $=\frac{r}{\sqrt{(FF-g)}}$. Hic igitur angulus vocetur $=\omega$, vt fiat

$$\frac{r}{\sqrt{(FF-G)}}=\text{coſ.}\,\omega,$$

hincque per integrationem conſtantem adiiciendo, quae ſit $=\theta$, erit $\Phi=\omega+\theta$; tum vero habebitur

$$r=F-u=\text{coſ.}\,\omega\sqrt{(FF-G)},$$

vnde fit

$$u=F-\text{coſ.}\,\omega\sqrt{(FF-G)},$$

conſequenter diſtantia planetae a ſole

$$v=\frac{1}{F-\text{coſ.}\,\omega\sqrt{(FF-G)}}.$$

§. 27. Reſtituamus nunc loco F et G valores aſſumtos atque habebimus

$$v=\frac{\alpha\alpha+\beta\beta+\gamma\gamma}{n-\text{coſ.}\,\omega\sqrt{(nn-(\frac{2n}{d}-\delta\delta)(\alpha\alpha+\beta\beta+\gamma\gamma)}}.$$

Quod ſi iam tam numeratorem quam denominatorem per n diuidamus et breuitatis ergo faciamus

$$\frac{\alpha\alpha+\beta\beta+\gamma\gamma}{n}=f \text{ et}$$

$$\sqrt{1-\frac{(\frac{2n}{d}-\delta\delta)(\alpha\alpha+\beta\beta+\gamma\gamma)}{nn}}=e$$

reſultabit haec formula: $v=\frac{f}{1-e\,coſ.\,\omega}$, ex qua forma intelligimus, quantitatem f deſignare ſemiparametrum orbitae a planeta deſcriptae, litteram vero e eius excentricitatem; tum vero angulum ω exprimere anomaliam veram ab aphelio computatam. Ducamus igitur in figura rectam S P ad aphelium directam, vt angulus P S z exhibeat anomaliam veram ω; et cum ſit angulus ☊ S $z=\phi=\omega+\theta$, erit longitudo aphelii a nodo aſcendente computata, ſiue angulus ☊ S P $=\theta$.

§. 28. Reducamus nunc etiam formulam pro dt inuentam ad anomaliam ω, et ex formulis inuentis fiet

$$\frac{dt}{d\phi}=\frac{vv}{\sqrt{(\alpha\alpha+\beta\beta+\gamma\gamma)}}.$$

Cum igitur ſit $d\phi=d\omega$ et

$$vv=\frac{ff}{(1-e\,coſ.\,\omega)^2} \text{ et } \sqrt{(\alpha\alpha+\beta\beta+\gamma\gamma)}=\sqrt{nf}$$

erit

$$dt=\frac{ff\,d\omega}{(1-e\,coſ.\,\omega)^2\sqrt{nf}}=f\sqrt{\frac{f}{n}}\cdot\frac{d\omega}{(1-e\,coſ.\,\omega)^2},$$

ideoque integrando tempus

$$t=f\sqrt{\frac{f}{n}}\int\frac{d\omega}{(1-e\,coſ.\,\omega)^2},$$

cuius integrale per methodos conſuetas facile eruitur. Conſtat autem, ſi fuerit $e<1$ curuam fore ellypſin, ſin autem ſit $e>1$, hyperbolam; caſu vero, quo $e=1$, parabolam.

§. 29. Perpendamus nunc accuratius, quomodo haec duo noua elementa f et e ex elementis datis deter-

determinentur; ac primo quidem conſtat eſſe

$$f = \frac{\alpha\alpha + \beta\beta + \gamma\gamma}{n},$$

deinde vero

$$e = \sqrt{1 - \frac{(\frac{2n}{d} - \delta\delta)(\alpha\alpha + \beta\beta + \gamma\gamma)}{nn}}.$$

Vbi ſi loco $\alpha\alpha + \beta\beta + \gamma\gamma$ ſcribamus nf, prodibit excentricitas ita expreſſa:

$$e = \sqrt{1 - \frac{f}{n}(\frac{2n}{d} - \delta\delta)} = \sqrt{1 - \frac{2f}{d} + \frac{\delta\delta f}{n}},$$

atque hinc porro colligitur diſtantia aphelii a ſole $= \frac{f}{1-e}$, et diſtantia perihelii $= \frac{f}{1+e}$, vnde fit ſemiaxis transuerſus $= \frac{f}{1-ee} = \frac{nd}{2n - d\delta\delta}$, vbi eſt $\delta\delta = a'a' + b'b' + c'c'$. Sicque omnia, quae ad orbitae et motus determinationem pertinent, ſunt aſſignata.

§. 30. Vt autem etiam poſitionem lineae apſidum determinemus, pro ſtatu initiali quaeramus tam angulum ω quam angulum ϕ: ex his enim erit $\theta = \phi - \omega$; ſicque innoteſcet angulus ☊ S P $= \theta$. Initio autem erat $v = d$, vnde pro ſtatu initiali ex formula $v = \frac{f}{1 - e\, coſ.\, \omega}$ erit $coſ.\, \omega = \frac{d - f}{de}$, quem angulum initialem deſignemus per Ω, ita vt ſit $coſ.\, \Omega = \frac{d-f}{de}$, vnde igitur iſte angulus computari poterit, quo inuento, ſi initio ponamus fuiſſe $\phi = \Phi$, inde definietur angulus quaeſitus $\theta = \Phi - \Omega$.

§. 31. Pro hoc autem angulo Φ inueniendo contemplemur iterum noſtrum planum fixum A S B, in quo ſit recta S ☊ linea nodorum, pro cuius poſitione vocaui- T. XVIII. Fig. 4.

 mus

mus angulum A S ☊ $= \zeta$, inuenimusque tang. $\zeta = -\frac{\alpha}{\beta}$. Fuerit nunc initio planeta in puncto h, pro quo ergo erant coordinatae $Sf = a$, $fg = b$ et $gh = c$, ipſa vero diſtantia a ſole $Sh = d$; ac manifeſtum eſt angulum ☊ Sh eſſe ipſum angulum Φ, quem quaerimus. Pro eo igitur inueniendo ex g ad S ☊ agatur normalis gk, et quia hk etiam ad S ☊ erit normalis, fiet vtique $\text{coſ.}\,\Phi = \frac{Sk}{Sh}$; Quia vero angulus A S ☊ $= fgk = \zeta$, facile reperitur diſtantia $Sk = a\,\text{coſ.}\,\zeta + b\,\text{ſin.}\,\zeta$, ſicque habebimus

$$\text{coſ.}\,\Phi = \frac{a\,\text{coſ.}\,\zeta + b\,\text{ſin.}\,\zeta}{d},$$

vnde ſi computetur angulus Φ, erit quaeſitus angulus $\vartheta = \Phi - \Omega$. Quemadmodum autem hic orbitam Saturni per ſtatum initialem determinauimus, caedem formulae ſimili modo pro Ioue valebunt, ſi modo loco litterarum minuſcularum maiuſculae vſurpentur.

De comparatione motus planetarum veri cum motu regulari.

§. 32. Si planetae nullam actionem in ſe inuicem excercerent, eorum motus per formulas ante inuentas ex ſtatu initiali facile determinari poſſent; ac ſi eorum orbetae referantur ad planum noſtrum fixum in coelo conſtitutum, quod cum ſitu, quem ecliptica initio huius ſacculi tenuit, conuenire aſſumimus, tabulae pro eorum motu definiendo multo forent ſimpliciores quam vulgo exhiberi ſolent. Primo enim tam linea nodorum quam inclinatio orbitae ad planum fixum nullam plane mutationem pateretur. Deinde etiam poſitio lineae apſidum perpetuo ad eadem coeli puncta dirigeretur; vnde his elementis ſemel cogni-

cognitis ſufficeret ad quoduis tempus longitudinem tantum mediam planetae, ſeu potius argumentum latitudinis medium ex tabulis mediorum motuum definire, neque opus eſſet, loca aphelii et nodorum computare, ſed ſola aequatio centri cum reductione ad planum fixum locum planetae exacte eſſet oſtenſura.

§. 33. Hoc igitur motu regulari conſtituto videamus quomodo planetarum motum verum, quatenus ab actione mutua perturbatur, cum regulari comparari et quantum ab eo diſcrepet definiri conueniat. Quoniam autem ob actionem mutuam euenire poteſt: primo vt tempus periodicum quodpiam augmentum vel decrementum accipiat; ſecundo, vt excentricitas aliquam mutationem patiatur; tertio, vt lineae nodorum aliquis motus ſuper plano fixo inducatur; quarto, vt etiam inclinatio laeuem quandam mutationem ſubeat; quinto, vt linea apſidum non in quiete permaneat, ſed aliquem motum progreſſiuum recipiat; ſexto denique, vt inſuper aliae inaequalitates periodicae ſeſe admiſceant: hos effectus ex aequationibus principalibus, quas ſupra pro motu planetarum perturbato exhibuimus, peti oportebit.

§. 34. Quod ad duos priores effectus attinet, ſi ſcilicet tempus periodicum et excentricitas conſtantem quandam reciperent, forma tabularum ad motum regularem conſtructarum nullam plane mutationem acciperent, quandoquidem tantum opus eſſet tabulam mediorum motuum ad verum tempus periodicum accommodare, ſimulque tabulam aequationum centri ex vera excentricitate ſupputare. Ac ſi tam lineae nodorum quam apſidum ab actione

tione mutua motus quiſpiam imprimeretur, qui ſaltem per aliquot ſaecula maneret conſtans, tum in tabulis mediorum motuum praeter loca media etiam ad quoduis tempus tam locus aphelii quam nodorum conſignari deberet, vnde tabulae eandem plane formam impetrarent, qua more recepto exhiberi ſolent. Sin autem inſuper etiam inclinatio per aliquot ſaecula quandam mutationem aequabilem pateretur, eam ſimili modo tabulis conſuetis inferre liceret, dum ſcilicet tabula pro latitudine et reductione ad planum fixum ſimul ad plures inclinationes accommodaretur. Sin autem praeterea inaequalitatas ſexto loco commemoratae accederent, eas in peculiaribus tabulis tabulis conſuetis adiici oporteret.

§. 35. Quare ſi ex aequationibus principalibus omnes aberrationes a motu regulari perſcrutari et cum tabulis more ſolito exſtructis comparare velimus, probe perpendere debemus, omnes effectus perturbationis, praeter vltimum, iam in ipſas tabulas eſſe relatas, ita vt tantum ſuperſit inaequalitates vltimi generis inueſtigare; vnde in hac inueſtigatione maxime curandum eſt, vt inaequalitates poſtremi ordinis ſollicite ab iis diſtinguamus, quae tabulis ordinariis iam ſunt inſertae; quia alioquin easdem perturbationes bis in computum traheremus, quod vitium forte iis correctionibus, quibus Aſtronomi tabulas planetarum iam emendare ſunt conati, obiici poteſt, dum effectus perturbationis in motu apheliorum productos denuo tabulis peculiaribus adiectis implicuerunt, cum tamen in promotione apheliorum iam fuerint in tabulas illati.

§. 36.

§. 36. His circumſtantiis probe perpenſis ſi in omnes effectus a perturbatione oriundos inquirere velimus, eos neutiquam cum tabulis aſtronomicis receptis comparari conuenit, quippe quae non contemnendam partem omnium perturbationum iam inuoluunt. Sed potius neceſſe erit ex ſtatu initiali cuiusque planetae peculiares tabulas conficere, quae eorum motum, ſi nulla plane ad eſſet perturbatio, accurate indicarent; tum enim admiſſa actione mutua ſi ex theoria perturbationum ad quoduis tempus verus planetae locus aſſignari potuerit, isque cum loco iſtarum tabularum comparetur, tum demum iudicare licebit, quinam effectus perturbationi quouis caſu ſit tribuendus. Cum autem talis inueſtigatio etiamnunc ſit difficillima, praecipue pro talibus planetis, quorum orbitae non adeo a ſe inuicem ſunt remotae, methodum hic adiungam, cuius ope, ſaltem per temporis ſpatium non nimis magnum, effectus perturbationis accurate aſſignari poterit.

De perturbatione motus planetarum per temporis interuallum non minis magnum oriunda.

§. 37. Inchoemus hanc inueſtigationem ab ipſo ſtatu initiali, quo erat $t = 0$, et quoniam poſuimus tum fuiſſe pro Ioue,

$$X = A;\ Y = B;\ Z = C;\ \frac{dX}{dt} = A';\ \frac{dY}{dt} = B';\ \frac{dZ}{dt} = C';$$

pro Saturno

$$x = a;\ y = b;\ z = c;\ \frac{dx}{dt} = a';\ \frac{dy}{dt} = b';\ \frac{dz}{dt} = c';$$

manifeſtum eſt, ſi nullae plane adeſſent vires ſollicitantes, vtriusque planetae motum futurum eſſe aequabilem et in directum procedentem. Tum igitur elapſo tempore t

dierum

dierum foret

$$X = A + A' t,\ Y = B + B' t,\ Z = C + C' t,$$

ſimilique modo

$$x = a + a' t,\ y = b + b' t,\ z = c + c' t,$$

haeque formulae ergo etiam cum vero motu vtriusque planetae conuenient, ſi modo tempus t accipiatur infinite paruum; vnde intelligitur, quo minus id ſtatuatur, eo propius has formulas ad verum motum eſſe acceſſuras.

§. 38. Hinc igitur patet, pro maiuſculis temporis interuallis motum accuratius per huiusmodi formulas expreſſum iri:

Pro Ioue

$$X = A + A' t + A'' t t + A''' t^3 + \text{etc.}$$
$$Y = B + B' t + B'' t t + B''' t^3 + \text{etc.}$$
$$Z = C + C' t + C'' t t + C''' t^3 + \text{etc.}$$

Pro Saturno

$$x = a + a' t + a'' t t + a''' t^3 + \text{etc.}$$
$$y = b + b' t + b'' t t + b''' t^3 + \text{etc.}$$
$$z = c + c' t + c'' t t + c''' t^3 + \text{etc.}$$

Quod ſi ergo ſumamus has formulas non vltra poteſtatem tertiam ipſius t extendi, quoniam earum termini ſequentes vehementer conuergere debent, iſtae formulae iam ad ſatis notabile tempus applicari poterunt, dabiturque talis terminus, quem ſi tempus t non ſuperet, hae formulae a motu vero vtiiusque planetae vix aberrare erunt cenſendae, ſiue error ſaltem pro inſenſibili haberi poterit.

§. 39.

§. 39. His autem valoribus adhibitis pro ſex noſtris aequationibus fundamentalibus, quas ſupra §. 9. exhibuimus, habebimus:

$$\frac{ddX}{dt^2} = 2A'' + 6A'''t \qquad \frac{ddx}{dt^2} = 2a'' + 6a'''t$$
$$\frac{ddY}{dt^2} = 2B'' + 6B'''t \qquad \frac{ddy}{dt^2} = 2b'' + 6b'''t$$
$$\frac{ddZ}{dt^2} = 2C'' + 6C'''t \qquad \frac{ddz}{dt^2} = 2c'' + 6c'''t$$

Quod ſi ergo hos valores pro membris ſiniſtris noſtrarum aequationum ſcribamus, in dextris autem, vbi nulla occurrunt differentialia, valores pro ipſis litteris X, Y, Z, et x, y, z, aſſumtos ſubſtituamus, inde nouos coëfficientes etiamnunc incognitos A, A, a, a, etc. inde definire licebit. At quoniam in membris ſiniſtris tempus t non vltra primam dimenſionem aſſurgit, etiam in dextris altiores poteſtates tuto negligere licebit, ita vt ſufficiat ibi ſtatuiſſe

$$X = A + A't, \quad Y = B + B't, \quad Z = C + C't,$$
$$x = a + a't, \quad y = b + b't, \quad z = c + c't,$$

quae formulae cum penitus ſint cognitae, ex iis coëfficientes adhuc incogniti in membris ſiniſtris occurrentes facillime poterunt definiri.

§. 40. His obſeruatis euoluamus primo diſtantias litteris V, v et w expreſſas, et cum ſit $V^2 = X^2 + Y^2 + Z^2$, erit quadratis ipſius t omiſſis

$$V^2 = A^2 + B^2 + C^2 + 2(AA' + BB' + CC')t,$$

pro qua expreſſione faciamus breuitatis gratia

$$A^2 + B^2 + C^2 = F^2 \text{ et } AA' + BB' + CC' = G,$$

ita vt ſit $V^2 = FF + 2Gt$. Simili modo pro diſtantia v faciamus

$$a a + b b + c c = f f \text{ et } a a' + b b' + c c' = g,$$

vt fiat $v v = f f + 2 g t$. Denique pro diſtantia w ponamus

$$(a - A)^2 + (b - B)^2 + (c - C)^2 = \mathfrak{F}\mathfrak{F} \text{ et}$$
$$(a - A)(a' - A') + (b - B)(b' - B') + (c - C)(c' - C') = \mathfrak{G}$$

vt fiat $w = \mathfrak{F}\mathfrak{F} + 2 \mathfrak{G} t$.

§ 41. Nunc igitur cum harum diſtantiarum cubi ſoli in denominatoribus occurrant; iis euolutis et altioribus ipſius t poteſtatibus poſt primam omiſſis, habebimus vt ſequitur:

$$\frac{1}{V^3} = \frac{1}{F^3 - \frac{3 G t}{F^5}}; \quad \frac{1}{v^3} = \frac{1}{f^3 - \frac{3 g t}{f^5}}; \quad \frac{1}{w^3} = \frac{1}{\mathfrak{F}^3 - \frac{3 \mathfrak{G} t}{\mathfrak{F}^5}},$$

quas ergo formulas in noſtris aequationibus ſingulas cum ſuis numeratoribus coniungi oportet.

§. 42. Hinc igitur pro terminis per V^3 diuiſis, ſi quadrata temporis t pariter omittantur, reperiemus

$$\frac{X}{V^3} = \frac{A}{F^3} + \left(\frac{A'}{F^3} - \frac{3 A G}{F^5}\right) t$$
$$\frac{Y}{V^3} = \frac{B}{F^3} + \left(\frac{B'}{F^3} - \frac{3 B G}{F^5}\right) t$$
$$\frac{Z}{V^3} = \frac{C}{F^3} + \left(\frac{C'}{F^3} - \frac{3 C G}{F^5}\right) t$$

ſimilique modo pro terminis per v^3 diuiſis

$$\frac{x}{v^3} = \frac{a}{f^3} + \left(\frac{a'}{f^3} - \frac{3 a g}{f^5}\right) t$$
$$\frac{y}{v^3} = \frac{b}{f^3} + \left(\frac{b'}{f^3} - \frac{3 b g}{f^5}\right) t$$
$$\frac{z}{v^3} = \frac{c}{f^3} + \left(\frac{c'}{f^3} - \frac{3 c g}{f^5}\right) t$$

At vero pro terminis per w^3 diuiſis, quo ibi concinnius exprimantur, ſtatuamus breuitatis gratia:

$a - A$

$$a - A = \mathfrak{A};\; b - B = \mathfrak{B};\; c - C = \mathfrak{C};$$
$$a' - A' = \mathfrak{A}';\; b' - B' = \mathfrak{B}';\; c' - C' = \mathfrak{C}';$$

vnde hi termini fient

$$\frac{x - X}{w^3} = \frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{F}^3} + \left(\frac{\mathfrak{A}'}{\mathfrak{F}^3} - \frac{3\,\mathfrak{A}\,\mathfrak{G}}{\mathfrak{F}^5}\right) t$$
$$\frac{y - Y}{w^3} = \frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{F}^3} + \left(\frac{\mathfrak{B}'}{\mathfrak{F}^3} - \frac{3\,\mathfrak{B}\,\mathfrak{G}}{\mathfrak{F}^5}\right) t$$
$$\frac{z - Z}{w^3} = \frac{\mathfrak{C}}{\mathfrak{F}^3} + \left(\frac{\mathfrak{C}}{\mathfrak{F}^3} - \frac{3\,\mathfrak{C}\,\mathfrak{G}}{\mathfrak{F}^5}\right) t$$

§. 43. Quia igitur nil aliud ſupereſt, niſi vt iſti valores in noſtris aequationibus ſubſtituantur et valores a tempore t immunes cum coefficientibus A'', B'', C''; a'', b'', c'' etc. illi vero qui tempus t continent cum litteris A, B, C et a, b, c comparentur, hoc facto ſequentes horum coefficientium bis ſignatorum incognitorum reperiemus determinationes:

$$A'' = -\frac{\Delta(1 + M)A}{F^3} + \frac{\Delta m \mathfrak{A}}{\mathfrak{F}^3} - \frac{\Delta m a}{f^3},$$
$$B'' = -\frac{\Delta(1 + M)B}{F^3} + \frac{\Delta m \mathfrak{B}}{\mathfrak{F}^3} - \frac{\Delta m b}{f^3},$$
$$C'' = -\frac{\Delta(1 + M)C}{F^3} + \frac{\Delta m \mathfrak{C}}{\mathfrak{F}^3} - \frac{\Delta m c}{f^3},$$

porro

$$a'' = -\frac{\Delta(1 + m)a}{f^3} - \frac{\Delta M \mathfrak{A}}{\mathfrak{F}^3} - \frac{\Delta M A}{F^3},$$
$$b'' = -\frac{\Delta(1 + m)b}{f^3} - \frac{\Delta M \mathfrak{B}}{\mathfrak{F}^3} - \frac{\Delta M B}{F^3},$$
$$c'' = -\frac{\Delta(1 + m)c}{f^3} - \frac{\Delta M \mathfrak{C}}{\mathfrak{F}^3} - \frac{\Delta M C}{F^3},$$

§. 44. Praeterea vero pro iisdem litteris ter ſignatis nanciſcemur ſequentes valores:

$$A''' = -\Delta(1+M)\left(\frac{A'}{F^3} - \frac{3AG}{F^5}\right) + \Delta m\left(\frac{\mathfrak{A}'}{\mathfrak{F}^3} - \frac{3\mathfrak{A}\mathfrak{G}}{\mathfrak{F}^5}\right) - \Delta m\left(\frac{a'}{f^3} - \frac{3ag}{f^5}\right),$$
$$B''' = -\Delta(1+M)\left(\frac{B'}{F^3} - \frac{3BG}{F^5}\right) + \Delta m\left(\frac{\mathfrak{B}'}{\mathfrak{F}^3} - \frac{3\mathfrak{B}\mathfrak{G}}{\mathfrak{F}^5}\right) - \Delta m\left(\frac{b'}{f^3} - \frac{3bg}{f^5}\right),$$
$$C''' = -\Delta(1+M)\left(\frac{C'}{F^3} - \frac{3CG}{F^5}\right) + \Delta m\left(\frac{\mathfrak{C}'}{\mathfrak{F}^3} - \frac{3\mathfrak{C}\mathfrak{G}}{\mathfrak{F}^5}\right) - \Delta m\left(\frac{c'}{f^3} - \frac{3cg}{f^5}\right),$$
$$a''' = -\Delta(1+m)\left(\frac{a'}{f^3} - \frac{3ag}{f^5}\right) - \Delta M\left(\frac{\mathfrak{A}'}{\mathfrak{F}^3} - \frac{3\mathfrak{A}\mathfrak{G}}{\mathfrak{F}^5}\right) - \Delta M\left(\frac{A'}{F^3} - \frac{3AG}{F^5}\right),$$
$$b''' = -\Delta(1+m)\left(\frac{b'}{f^3} - \frac{3bg}{f^5}\right) - \Delta M\left(\frac{\mathfrak{B}'}{\mathfrak{F}^3} - \frac{3\mathfrak{B}\mathfrak{G}}{\mathfrak{F}^5}\right) - \Delta M\left(\frac{B'}{F^3} - \frac{3BG}{F^5}\right),$$
$$c''' = -\Delta(1+m)\left(\frac{c'}{f^3} - \frac{3cg}{f^5}\right) - \Delta M\left(\frac{\mathfrak{C}'}{\mathfrak{F}^3} - \frac{3\mathfrak{C}\mathfrak{G}}{\mathfrak{F}^5}\right) - \Delta M\left(\frac{C'}{F^3} - \frac{3CG}{F^5}\right),$$

§. 45. Inuentis igitur his coefficientibus, motum vtriusque planetae per tempus non nimis magnum t dierum ab initio elapſum ſatis exacte cognoſcemus; erit enim vti aſſumſimus:

Pro Ioue

$$X = A + A' t + A'' tt + A''' t^3.$$
$$Y = B + B' t + B'' tt + B''' t^3.$$
$$Z = C + C' t + C'' tt + C''' t^3.$$

Pro Saturno

$$x = a + a' t + a'' tt + a''' t^3.$$
$$y = b + b' t + b'' tt + b''' t^3.$$
$$z = c + c' t + c'' tt + c''' t^3.$$

ex quibus formulis, poſtquam pro quouis caſu in numeris fuerint euolutae, facile diſcernere licebit, quot dies tempori t ſine errore tribui poterunt. Cum enim hae formulae plerumque vehementer conuergant, haud difficulter iudicabitur, vtrum ſequentes terminos poſt tertiam poteſtatem ipſius t ſine errore negligere liceat nec ne.

§. 46.

§. 46. Cum autem hoc modo quantitas interualli temporis fuerit conſtituta, ſtatus planetarum pro fine huius temporis inuentus iterum tanquam ſtatus initialis ſpectari poterit, a quo ſimili modo per aequale temporis interuallum vlterius progredi licebit; et ita porro pro ſingulis interuallis cognoſcetur effectus perturbationis. Vnde ſi talia interualla per aliquot reuolutiones integras vtriusque planetae computentur, haud difficulter diiudicare licebit, quantas immutationes tam tempora periodica et excentricitates quam poſitio lineae apſidum et nodorum inde accipiant, quae ergo iam in tabulis ordinariis contineri ſunt cenſendae; reliquae vero portiones perturbationis praebebunt inaequalitates periodicas, quas peculiaribus tabulis complecti conueniet; atque hic tutiſſimus videtur modus, ad perfectam cognitionem omnium perturbationum, quas planetae ſibi mutuo inferunt, perueniendi.

§. 47. Quo vſum harum formulam exemplo illuſtremus, conſtituamus initium interualli temporis noſtri t in ipſo initio huius ſaeculi, quoniam poſitio, quam ecliptica tum tenuit, noſtrum ipſum planum fixum ſuppeditat, et tabulis Caſſinianis vtentes reperimus pro hoc tempore loca heliocentrica Iouis et Saturni vt ſequitur:

Pro Ioue.

	Anno 1700 Januar. 1 d.	Anno 1700 Ianuar. 2 d.
Longit. ♃ =	$9^s.\ 10^\circ.\ 26'.\ 53''$	$9^s.\ 10^\circ.\ 32'.\ 1''$
Latitudo Auſtr.	$0^\circ.\ 4'.\ 5$	$0.\ 4.\ 13$
Diſtantia a ſole	5, 1864	5, 1861

Pro Saturno.

Anno 1700 Ianuar. 1 d.	Anno 1700 Ianuar. 2 d.
Longit. ♄ = 11ˢ. 2°. 57′. 54″	11ˢ. 2°. 59′. 51″
Latitudo Auſtr. 1. 40. 18	1. 40. 21
Diſtantia a ſole = 9, 7470	9, 7466

Haec ergo loca pro meridiano Pariſino ipſo momento meridiei vtriusque diei ſunt intelligenda. At quoniam in his tabulis diſtantia ſecundum regulam *Kepleri* ex temporibus periodicis ſunt definitae, vbi aſſumitur planetas a ſola maſſa Solis ad Solem attrahi, cum tamen, vt vidimus, ad maſſam Solis inſuper maſſa planetae ſit addenda, ita vt vis Iouem ad Solem vrgens ſit vt $1 + M = 1 + \frac{1}{1067}$ et vis Saturnum ad Solem attrahens vt $1 + m = 1 + \frac{1}{3021}$, cubi diſtantiarum in eadem ratione augeri debebunt, vnde diſtantiam Iouis a ſole augeri oportebit in ratione 1 ad $1 + \frac{1}{3200}$, diſtantia vero Saturni in ratione 1 ad $1 + \frac{1}{9060}$,

vnde fiet pro primo Ianuarii

Diſtantia Iouis = 5, 188128, Diſtantia Saturni = 9, 748083

at pro ſecundo Ianuarii

Diſtantia Iouis = 5, 187829, Diſtantia Saturni = 9, 747683

§. 48. Ex his iam locis computemus ternas coordinatas, quae pro Ioue ex primo Ianuarii dabunt litteras A, B, C hincque etiam diſtantiam F; pro Saturno autem *a*, *b*, *c* et *f*, quas igitur hic apponamus:

a =

$a = 8,679506$; $b = -4,4$[illegible]; $c = -0,284367$; $f = 9,748083$
$A = 0,940210$; $B = -5,09$[illegible]711; $C = -0,00$[illegible]; $F = 5,188128$

$a\text{-}A = 7,739296$; $b\text{-}B = +0,669732$; $c\text{-}C = -0,278221$;
ſiue $\mathfrak{A}$ ſiue $\mathfrak{B}$ ſiue $\mathfrak{C}$

Deinde hae coordinatae ab iis quae Ianuario 2 reſpondent ſubtractae relinquunt ternas celeritates, quae erunt:

$a' = 0,002282$; $b' = -0,005108$; $c' = -0,000130$; $f' = -0,000400$
$A' = 0,007556$; $B' = -0,001711$; $C' = -0,000185$; $F' = -0,000299$

$a'\text{-}A' = -0,005274$; $b'\text{-}B' = -0,003397$; $c'\text{-}C' = +0,000055$
ſiue $\mathfrak{A}'$ ſiue $\mathfrak{B}'$ ſiue $\mathfrak{C}'$

praeterea hic notaſſe iuuabit, cum ſit

$$G = A A' + B B' + C C'$$

fore $G = F F'$, ſimilique modo $g = f f'$.

§. 49. His valoribus euolutis definiamus quoque valores

$$\mathfrak{F}\mathfrak{F} = (a-A)^2 + (b-B)^2 + (c-C)^2 = \mathfrak{A}^2 + \mathfrak{B}^2 + \mathfrak{C}^2 \text{ et}$$
$$\mathfrak{G} = \mathfrak{A}\mathfrak{A}' + \mathfrak{B}\mathfrak{B}' + \mathfrak{C}\mathfrak{C}',$$

ac reperiemus

$\mathfrak{A}^2 = 59,89670$	$\mathfrak{A}\mathfrak{A}' = -0,04082$
$\mathfrak{B}^2 = 0,44854$	$\mathfrak{B}\mathfrak{B}' = -0,00227$
$\mathfrak{C}^2 = 0,07741$	$\mathfrak{C}\mathfrak{C}' = -0,00001$
$\mathfrak{F}^2 = 60,42265$	$\mathfrak{G} = -0,04310$
	ergo $3\mathfrak{G} = -0,12930$.

Vt nunc hinc valores ſupra datos euoluamus, in ſubſidium

um apponamus loga[illegible] [illegible]minorum, quibus indigemus:

$$l\frac{1}{F^3} = 7,8549679;\quad l\frac{1}{f^3} = 7,0332427;\quad l\frac{1}{\mathfrak{g}^3} = 7,3282005.$$

Deinde cum ſit $G = FF'$ et $g = ff'$, erit

$$\frac{3\,G}{F^5} = \frac{3\,F'}{F^4} \text{ et } \frac{3\,g}{f^5} = \frac{3\,f'}{f^4};$$

hinc per logarithmos:

$$l\frac{3\,G}{F^5} = (-)\,4,0927469;\quad l\frac{3\,g}{f^5} = (-)\,3,1235048;$$
$$l\frac{3\,\mathfrak{G}}{\mathfrak{g}^5} = (-)\,4,6585993.$$

§. 50. Ex his iam valoribus computemus litteras bis ſignatas, tam maiuſculas quam minuſculas, quem in finem euoluamus ſequentes valores:

$$l\frac{A}{F^3} = 7,8281928;\ l\frac{B}{F^3} = (-)\,8,5624283;\ l\frac{C}{F^3} = (-)\,5,6435605$$
$$\frac{A}{F^3} = 0,0067328;\quad \frac{B}{F^3} = -0,0365114;\quad \frac{C}{F^3} = -0,0000440,$$

porro

$$l\frac{a}{f^3} = 7,9717377;\ l\frac{b}{f^3} = (-)\,7,6795464;\ l\frac{c}{f^3} = (-)\,6,4871219$$
$$\frac{a}{f^3} = 0,0093699;\quad \frac{b}{f^3} = -0,0047813;\quad \frac{c}{f^3} = -0,0003070$$

tandem

$$l\frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{g}^3} = (+)\,8,2169019;\ l\frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{g}^3} = (+)\,7,1541015;\ l\frac{\mathfrak{C}}{\mathfrak{g}^3} = (-)\,6,7725904$$
$$\frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{g}^3} = 0,0164779;\quad \frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{g}^3} = 0,0014254;\quad \frac{\mathfrak{C}}{\mathfrak{g}^3} = -0,0005923.$$

§. 51. Hinc igitur colligere poterimus valores litterarum bis ſignatarum, vbi quidem fractiones M et m cum littera Δ adhuc in calculo retineamus, ſicque reperiemus:

Pro

Pro Ioue

$$A'' = -\Delta(1+M).0,0067328 + \Delta m.0,0164779 - \Delta m.0,0093699$$

ſiue $A'' = -0,0067328.\Delta(1+M) + 0,0071080.\Delta m$

$$B'' = +\Delta(1+M).0,0365114 + \Delta m.0,0014254 + \Delta m.0,0047813$$

ſiue $B'' = 0,0365114\,\Delta(1+M) + 0,0062067.\Delta m$

$$C'' = +\Delta(1+M).0,0000440 - \Delta m.0,0005923 + \Delta m.0,0003070$$

ſiue $C'' = 0,0000440.\Delta(1+M) - 0,0002853.\Delta m$

Pro Saturno

$$a'' = -\Delta(1+m).0,0093699 - \Delta M.0,0164779 - \Delta M.0,0067328$$

ſiue $a'' = -0,0093699.\Delta(1+m) - 0,0232107.\Delta M$

$$b'' = \Delta(1+m).0,0047813 - \Delta M.0,0014254 + \Delta M.0,0365114$$

ſiue $b'' = 0,0047813.\Delta(1+m) + 0,0350860.\Delta M$

$$c'' = +\Delta(1+m).0,003070 + \Delta M.0,0005923 + \Delta M.0,0000440$$

ſiue $c'' = 0,0003070.\Delta(1+m) + 0,0006363.\Delta M$

§. 52. Subſtituamus nunc pro Δ, M et m valores ſupra inuentos, ſcilicet;

$$\Delta = 0,0002945493;\ M = \tfrac{1}{1067} \text{ et } m = \tfrac{1}{3021},$$

vnde fit

$$l\Delta(1+M) = 6,4695649;\ l\Delta(1+m) = 6,4693018;$$
$$l\Delta M = 3,4409936;\ l\Delta m = 2,9890073;$$

vnde valores ante inuentos ita per meros numeros euoluamus, vt maneant bipartiti, quandoquidem pars prior ad motum regularem pertinet, poſterior vero perturbationem complectitur. Erunt igitur

	Numeri.	Logarithmi.
$A'' =$	$-$ 0, 00000198499	4, 2977577
	$+$ 0, 00000000069	0, 8407547
$B'' =$	$+$ 0, 00001076448	5, 0319932
	$+$ 0, 00000000060	0, 7818680
$C'' =$	$+$ 0, 00000001297	2, 1131254
	$-$ 0, 000000000003 . . . $-$	1, 4443091
$a'' =$	$-$ 0, 00000276083	4, 4410395
	$-$ 0, 00000000641	1, 8066818
$b'' =$	$+$ 0, 00000140880	0, 1488482
	$+$ 0, 06000000968	1, 9861275
$c'' =$	$+$ 0, 00000009045	2, 9564237
	$+$ 0, 00000000017	0, 2446555

§. 53. Computemus denique etiam litteras ter ſignatas, id quod commodiſſime fiet ſequenti modo

$$\frac{A'}{F^3} = \quad 0,0000541078;$$
$$-\frac{3GA}{F^5} = \underline{+0,0000011640}$$
$$+0,0000552718;$$

$$\frac{B'}{F^3} = -0,0000122523;$$
$$-\frac{3GB}{F^5} = \underline{-0,0000063126}$$
$$-0,0000185649;$$

$$\frac{C'}{F^3} = -0,0000013262.$$
$$-\frac{3GC}{F^5} = \underline{-0,000000076}$$
$$-0,0000013338.$$

$$\frac{a'}{f^3} = +0,0000024635;$$
$$-\frac{3ag}{f^5} = \underline{+0,0000011534}$$
$$+0,0000036169;$$

$\frac{b'}{f^3}$

$$\frac{b'}{f^3} = -0,0000055143;$$

$$-\frac{3bg}{f^5} = \frac{-0,0000005886}{-0,0000061029};$$

$$\frac{c'}{f^3} = -0,0000001403.$$

$$-\frac{3cg}{f^5} = \frac{-0,0000000378}{-0,0000001781}.$$

$$\frac{\mathfrak{A}'}{\mathfrak{F}^3} = -0,0000112299;$$

$$-\frac{3\mathfrak{A}\mathfrak{G}}{\mathfrak{F}^5} = \frac{+0,0000352615}{+0,0000240316};$$

$$\frac{\mathfrak{B}'}{\mathfrak{F}^3} = -0,0000072327;$$

$$-\frac{3\mathfrak{B}\mathfrak{G}}{\mathfrak{F}^5} = \frac{+0,0000041813}{-0,0000041813};$$

$$\frac{\mathfrak{C}'}{\mathfrak{F}^3} = +0,0000001171.$$

$$-\frac{3\mathfrak{C}\mathfrak{G}}{\mathfrak{F}^5} = \frac{-0,0000012676}{-0,0000011505}.$$

§. 54. His iam formulis per numeros euolutis pro litteris noſtris ter ſignatis §. 44 ſequentes valores colligemus:

Pro Ioue.

$$A''' = -\Delta(1+M).\,0,0000552718 + \Delta m.\,0,0000240316$$
$$- \Delta m.\,0,0000036169$$

ſiue $A''' = -0,0000552718\,\Delta(1+M) + 0.0000204147\,\Delta m$

$$B''' = \Delta(1+M).\,0,0000185649 - \Delta m.\,0,0000041813$$
$$+ \Delta m.\,0,0000061029$$

ſiue $B''' = +0,0000185649.\Delta(1+M) + 0,0000019216.\Delta m$

$$C''' = \Delta(1+M)\,0,0000013338 - \Delta m.\,0,0000011505$$
$$+ \Delta m.\,0,0000001781$$

ſiue $C''' = 0,0000013338.\Delta(1+M) - 0,0000009724.\,\Delta m$

Pro Saturno.

$a''' = -\Delta(1+m).\ 0,000006169 - \Delta M.\ 0,0000240316$
$\qquad - \Delta M.\ 0,0000552718$

ſiue $a''' = -0\ 0000036169.\Delta(1+m) - 0,0000793034.\Delta M$

$b''' = \Delta(1+m).\ 0,0000061029 + \Delta M.\ 0,0000041813$
$\qquad + \Delta M.\ 0,0000185649$

ſiue $b''' = 0.0000061029.\Delta(1+m) + 0,0000227462\ \Delta M$

$c''' = \Delta(1+m).\ 0,0000001781 + \Delta M.\ 0,0000011505$
$\qquad + \Delta M.\ 0,0000013338$

ſiue $c''' = 0,0000001781.\Delta(1+m) + 0,0000024843.$

§. 55. Tandem hi valores penitus per numeros euoluantur, diſtinguendis tamen binis cuiusque partibus, quippe prior reſpondet motui regulari, poſterior vero perturbationi. Sicque nanciſcemur

	Numeros.	logarithmos.
$A''' =$	− 0,00000001629553	2,2120684
	+ 0,000000000000199	− 2,2989503
$B''' =$	+ 0,00000000547340	1,7382576
	+ 0,0000000000000019	− 3,2726703
$C''' =$	+ 0,000000000039324	0,5946556
	− 0,0000000000000009	− 4,9768523
$a''' =$	− 0,00000000106571	1,0276383
	− 0,000000000002189	− 1,3402854
$b''' =$	+ 0,00000000179820	1,2548380
	+ 0,000000000000627	− 2,7979204
$c''' =$	+ 0,000000000005247	− 1,7199657
	+ 0,0000000000000068	− 3,8361976

§. 56.

§. 56. Quod ſi hi valores ter ſignati cum praecedentibus bis ſignatis comparentur, circiter millies minores deprehenduntur; vnde concludere licet, ſi ad litteras quater ſignatas progredi vellemus, eas denuo prope modum millies minores eſſe prodituras. His autem valoribus inuentis pro tempore t dierum elapſo coordinatae pro locis vtriusque planetae erunt:

Pro Ioue

$$X = A + A' t + A'' t t + A''' t^3$$
$$Y = B + B' t + B'' t t + B''' t^3$$
$$Z = C + C' t + C'' t t + C''' t^3$$

Pro Saturno

$$x = a + a' t + a'' t t + a''' t^3$$
$$y = b + b' t + b'' t t + b''' t^3$$
$$z = c + c' t + c'' t t + c''' t^3$$

§. 57. Praeterea vero etiam hinc ternae celeritates vtriusque planetae ad idem tempus aſſignari poterunt, quippe quae erunt:

Pro Ioue.	Pro Saturno.
$\frac{dX}{dt} = A' + 2 A'' t + 3 A''' t t$	$\frac{dx}{dt} = a' + 2 a'' t + 3 a''' t t$
$\frac{dY}{dt} = B' + 2 B'' t + 3 B''' t t$	$\frac{dy}{dt} = b' + 2 b'' t + 3 b''' t t$
$\frac{dZ}{dt} = C' + 2 C'' t + 3 C''' t t$	$\frac{dz}{dt} = c' + 2 c'' t + 3 c''' t t$

§. 58. Quia hae progreſſiones tantopere conuergunt, litterae t ſatis magnum valorem tribuere licebit, antequam error ſenſibilis metui debeat. Ad quod diiudicandum

candum obſeruaſſe iuuabit, errorem vnitatis in quinta figura decimali commiſſo vix errorem duorum minutorum ſecundorum in loco planetae producere; vnde intelligitur, pro litteera t tuto decem vel 20 dies accipi poſſe, neque verendum eſſe ne in parte regulari error vnius minuti ſecundi resultet. Pro partibus autem perturbationem continentibus nullus error exſurget, etiamſi interuallum centum dierum aſſumemus ſumendo $t = 100$. Pro partibus quidem regularibus valor $t = 100$ vtique nimis foret magnus; ſed quoniam ex ſtatu initiali rite conſtituto facile tabulae pro motu regulari ſequente conſtrui poſſunt ex iis pro initio cuiusque interualli tam locus quam motus vtriusque planetae excerpi poterit, qui etiamſi a vero parumper diſcrepet, tamen perturbationes in ſequentibus interuallis nullum inde mutationem patientur. Hoc modo omnia interualla temporis ſucceſſiua vsque ad 100 dies augere licebit, quandoquidem totum negotium huc redit, vt effectus perturbationis in ſingulis interuallis ſatis exacte definiatur.

§. 59. Quod ſi ergo hac ratione per interualla centum dierum progredi et ambos planetas in motu quaſi proſequi velimus, omnes perturbationes ex ſingulis interuallis collectae effectum totum inde oriundum declarabunt. Ac ſi hoc modo calculum vsque ad 60 annos, quo tempore Saturnus duas, Iupiter vero quinque reuolutiones abſoluit, continuare lubuerit, inde haud difficulter omnes inaequalitates ab actione mutua oriundas cognoſcere indeque tabulas ſolitas emendare licebit.

DE

DE ELEMENTIS ORBITAE COMETAE A. 1773 OBSERVATI, VBI PRAEPRIMIS DISQVIRITVR, VTRVM HVIVS COMETAE TEMPVS PERIODICVM ASSIGNARE LICEAT?

Auctore

A. I. LEXELL.

§. 1.

Praecipua ratio quae mihi perſuaſit vt hanc diſquiſitionem ſuſciperem, erat, quod Celeb. *Lambert* in Ephemeridibus Aſtronomicis Acad. Scientiar. Berolinenſis pro Anno 1777, de Elementis orbitae huius Cometae agens, aſſeruerit: primum per conſtructionem huius orbitae ſe in eam inductum fuiſſe ſuſpicionem, quod ellipticam habere debeat figuram, pag. 130; tumque adhibitis obſervationibus Berolini, diebus 13 Nou. et 10 Dec. 1773, nec non 4 Ianuar. 1774, inſtitutis, ſe inueniſſe tempus Periodicum huius Cometae 54 Annorum cum dimidio, quod tamen iuſto breuius eſſe exiſtimat illuſtris hic Mathematicus. Pag. 136. Auctoritate igitur tanti viri innixus,

xus, eo potiori iure exactiorem de orbita huius Cometae disquiſitionem indagine dignam exiſtimaui, quod Celeb. Meſſier licuerit per integros ſex menſes curſum huius Cometae ſequi, vnde portionem orbitae Cometae hoc temporis interuallo circa Solem deſcriptam, ſatis inſignis fore magnitudinis mihi perſuaſi. Verum primis mox tentaminibus mihi patuit, portionem orbitae, quam Cometa eo tempore quo obſeruatus fuit, circa Solem deſcripſit, non reſpondere niſi angulo 68 circiter graduum, ita vt ex hoc capite admodum exigua ſpes eſſet, quidquam vel cum aliqua veriſimilitudine de tempore Periodico huius Cometae determinandi. Calculis autem ad finem perductis perſpicue intellexi, de tempore Periodico ex iis quae adſunt obſeruationibus, nihil concludi poſſe. Quamuis autem id quod mihi hac disquiſitione propoſueram, perficere non licuerit, tamen Aſtronomis non prorſus ingratum fore exiſtimo, ſi breuiter expoſuero, qua ratione hanc indagationem proſecutus ſum, idque eo magis, quo rarius inter Aſtronomos obuenire ſoleant disquiſitiones de orbitis Cometarum, ratione habita excentricitatis iſtarum orbitarum.

§. 2. Ne inutilem valde et taedioſum ſuſcipere coactus eſſem laborem, primum quidem et ante omnia pro ſtatuendis certis Hypotheſibus Longitudinis Nodi et inclinationis orbitae Elementa a Cel. *Pingré* allata, conſulenda eſſe exiſtimaui. Inuenerat autem Celebris hic Aſtronomus pro orbita Parabolica: Longitudinem Nodi aſcendentis $4^s. 1^\circ. 15'. 37''$ et Inclinationem orbitae $61^\circ. 25' 21''$. Tum vero adhuc deſiderabatur, vt variatio in inclinatione orbitae, datae mutationi in Longitudine Nodi reſpondens, exqui-

exquireretur; id quod quidem independenter a reliquis Cometae Elementis perficere licet, ſi interea temporis ac Cometa obſeruatus fuerit, terra per lineam Nodorum tranſierit. Nam quo tempore terra in linea Nodorum verſatur, inclinatio plani per centra Solis, Cometae et terrae tranſeuntis, ipſam inclinationem orbitae conſtituet; inuenitur autem haec inclinatio per datam latitudinem Cometae Geocentricam et elongationem Cometae a Sole. Pro Cometa igitur Annis 1773 et 1774 obſeruato, commodum accidit, vt terra inter 19 et 21 Ian. 1774 per Lineam Nodorum Cometae pertranſierit; vnde quum diebus 19 et 21 Ian. habeantur obſeruatae Longitudines et Latitudines Cometae, harum ope ſequenti ratiocinio inclinationem orbitae pro certo valore Longitudinis Nodi, ſaltem cum praeciſione aliquot minutorum, determinare licebit.

§. 3. Quum igitur fuerit

A. 1774

Temp. med. Pariſ.	Longit. terrae.	Longit. Com.	Latit. Com.
19 Ian. $17^h. 21'. 56''$	$4^s. 0°. 19'. 5''$	$5^s. 22°. 52'. 14''$	$54°. 37'. 29$
. . . 17. 26. 55	4. 0. 19. 17	5. 22. 52. 0	54. 37. 31
21 . . 16. 38. 18	4. 2. 19. 14	5. 22. 10. 12	55. 31. 39
. . . 17. 20. 58	4. 2. 21. 1	5. 22. 10. 9	55. 32. 9

habebimus pro his quatuor momentis, inclinationes plani per centra Solis, terrae et Cometae ad Eclipticam:

I.	19 Ian.	$17^h. 21'. 56''$ . .	$60°. 35'. 24''$
II.		17. 26. 55. . .	60. 35. 36
III.	21 . . .	16. 38. 18. . .	62. 18. 37
IV.		17. 20. 58. . .	62. 19. 41

ex quo iam patet pro Longitudine Nodi $4^s. 1°$, inclina-

tionem orbitae inter 60°. 36′ et 62°. 18′ reperiri. Exactius autem valor inclinationis reperietur, ſi ſupponamus eius variationem eſſe variationi temporis proportionalem, quae ſuppoſitio etiamſi non prorſus fuerit exacta, tamen nec valde erroneas ſuppeditare poteſt concluſiones. Facta igitur combinatione primae et ſecundae concluſionis pro inclinatione ſeparatim cum tertia et quarta, hae orientur concluſiones pro inclinatione orbitae:

Suppoſita Longit. Nodi	4ˢ.	1°.	10′	4ˢ.	1°.	15′
Inclin. Orbitae	61°.	19′.	8″	61°.	23′.	26″
	61.	19.	0	61.	23.	18
	61.	19.	9	61.	23.	31
	61.	18.	57	61.	23.	18
medium	61.	19.	4	61.	23.	23

Deinde vero quoque iſta ratione haec disquiſitio inſtitui poteſt, vt primum exploremus, quam Longitudinem et Latitudinem habere debuerit Cometa, pro certa conditione Longitudinis Solis; ſupponendo quod mutationes in Longitudine et Latitudine Cometae temporibus exiſtant proportionales. Hoc modo fiet ex comparatione primae obſeruationis cum tertia et quarta

	Pro Longit. terrae			Longit. Comet.				Latit. Comet.		
I	4ˢ.	1°.	10′.	5ˢ.	22°.	34′.	25″	55°.	0′.	26″
III	4.	1.	15.	5.	22.	32.	40	55.	2.	41
I	4.	1.	10.	5.	22.	34.	41	55.	0.	19
IV	4.	1.	15.	5.	22.	32.	57	55.	2.	33

Simili modo ex combinatione ſecundae obſeruationis cum tertia et quarta:

Pro

Pro Longit. terrae	Longit. Cometae	Latit. Cometae.
4ˢ. 1°. 10′	5ˢ. 22°. 34′. 19	55°. 0′. 24″
	5. 22. 34. 34	55. 0. 17
4. 1. 15	5. 22. 32. 34	55. 2. 42
	5. 22. 32. 49	55. 2. 33

Iamque ex his datis pro inclinatione orbitae ſequentes prodibunt valores:

Pro Longitudine Nodi	4ˢ. 1°. 10′	4ˢ. 1°. 15′
Inclinatio orbitae	61°. 18′. 56″	61°. 23′. 12″
	61. 18. 44	61. 23. 0
	61. 18. 56	61. 23. 16
	61. 18. 45	61. 23. 4
	61. 18. 50	61. 23. 8

qui valores cum prius inuentis ſatis bene conſentiunt. Quamuis vero vtrisque leuiuſculi errores ineſſe queant, facile perſpicitur, illos vix ac ne vix quidem bina vel tria minuta prima excedere poſſe.

§. 4. Elementa igitur Cometae exquiſitueri, ſequentium trium obſeruationum vſum adhibuimus:

	Temp. med. Pariſ.	Longit. Comet.	Latit. Comet.	
1773. Octob.	13. 17ʰ. 3′. 14″	5ˢ. 3°. 40′. 24″	3°. 21′. 14″	A
Decem.	14. 18. 27. 50	5. 24. 52. 43	33. 53. 32	B
1774. April	14. 9. 35. 25	4. 16. 15. 3	59. 50. 43	

pro quibus temporum momentis Longitudines Solis et diſtantiae Solis a terra ita habentur expreſſae:

Longit. ☉	Log. diſt. ☉ a ♁
6ˢ. 21°. 8′. 57″	9,998350
8. 23. 41. 25	9,992905
0. 24. 57. 16	0,001906

 vbi

vbi quidem obſeruationem primam et vltimam quantum fieri potuit inter ſe remotas, adhibendas exiſtimauimus, vt ſcilicet portio orbitae interea circa Solem deſcriptae eo maior euaderet. Reliqua disquiſitio inſtituta eſt ſecundum Methodum Illuſtr. *Euleri*, qua nimirum conſtitutis certis hypotheſibus pro Longitudine Nodi et inclinatione orbitae, primum ope Latitudinum et Longitudinum Geocentricarum, quaeruntur elongationes Cometae a Nodo in orbita ſua e Sole viſae, nec non diſtantiae Cometae a Sole; quibus elementis adhibitis pro tribus momentis temporum aſſignabilibus, Elementa orbitae Cometae determinari poſſunt, inter aliaque tempus *Perihelii* per vnamquamque obſeruationem ſeorſim aſſignabitur; vbi quidem ſi tres hi valores inter ſe congruant, id indicio erit valores pro longitudine Nodi et inclinatione orbitae rite eſſe ſuppoſitos. At vero ſi aliqua oriatur diſcrepantia, ex immutatis hypotheſibus pro Longitudine Nodi et inclinatione orbitae, nouae expreſſiones hinc reſultantes pro tempore *Perihelii*, facile declarabunt, quanta mutatio Longitudini Nodi et inclinationi orbitae primum ſuppoſitis induci debeat, vt perfectus oriatur conſenſus pro tempore *Perihelii* ex tribus obſeruationibus deducto.

§. 5. In primo igitur calculo his tribus hypotheſibus vſus ſum:

Longitudo Nodi:	$4^s.\ 1^\circ.$;	$4^s.\ 2^\circ.$;	$4^s.\ 1^\circ$,
Inclinatio orbitae	$61^\circ.\ 30'$;	$61^\circ.\ 30'$;	$61^\circ.\ 15'$,

eoque ad finem perducto, ſi x, y denotent correctiones Longitudinis Nodi et inclinationis orbitae, quarum prior in partibus integri Gradus exprimitur, poſterior autem

in

in partibus quindecim minutorum primorum, pro tempore *Perihelii* hae tres exortae ſunt expreſſiones:

Sept. 8, 7492 − 7, 9490. x + 3, 2846. y,
11, 7772 − 15, 3624. x + 5, 8639. y,
13, 9666 − 18, 7204. x + 8, 3942. y,

ex quibus hae binae colliguntur aequationes:

$$3,0280 - 7,4134 \cdot x - 2,5793 \cdot y = 0,$$
$$2,1894 - 3,3580 \cdot x - 2,5303 \cdot y = 0,$$

quibus euolutis conſequemur:

$x = + 0,19944$ circiter et $y = - 0,60065$; ſiue
$x = 11'. 58''$, $y = - 9'. 1''$,

ita vt eſſe deberet Longitudo Nodi 4ˢ. 1°. 12′ et inclinatio orbitae 61°. 21′. circiter, ſi Methodo procedendi omnis accuratio tribui poſſet. Verum quum in hac Methodo ſupponatur variationes in tempore *Perihelii* ex ſingulis obſeruationibus deducto, praeciſe proportionales eſſe variationibus ſiue in Longitudine Nodi, ſeu in inclinatione orbitae ſuppoſitis, quod tamen non niſi pro valde exiguis valoribus harum variationum locum habere poteſt; facile quoque perſpicitur valores iam inuentos non niſi pro approximationibus quibusdam haberi poſſe.

§. 6. Poſt nonnullos alios calculos, quos hic breuitatis gratia praetereundos exiſtimamus, his demum hypotheſibus vſi ſumus:

Pro Long. Nodi:	4ˢ. 1°. 10′. 30″;	4ˢ. 1°. 11′. 0″;	4ˢ. 1°. 10′. 30″
Pro Incl. orbitae	61. 19. 0	61. 19. 0	61. 19. 10,

ſicque ad has peruenimus expreſſiones pro tempore *Perihelii*:

Sept. 5, 1763 − 0, 0634. x + 0, 0386. y,
5, 1467 − 0, 1234. x + 0, 0684. y,
5, 1226 − 0, 1487. x + 0, 0963. y,

vbi x exprimitur in partibus dimidii minuti primi, y vero in partibus decem ſcrupulorum ſecundorum. Ope autum expreſſionum propoſitarum, hae prodeunt aequationes:

$$0,0296 + 0,0600.x - 0,0298.y = 0,$$
$$0,0537 + 0,0853.x - 0,0577.y = 0,$$

vnde conficitur

$$x = -0,117 \text{ et } y = 0,757, \text{ ſiue}$$
$$x = -3'',5 \text{ et } y = +7'',6,$$

vnde eſſe deberet Longitudo Nodi $4^s. 1°. 10'. 26'', 5$ et Inclinatio orbitae $= 61°. 19'. 7'', 6$. Reapſe autem calculo pro Longitudine Nodi $4^s. 1°. 10'. 26'', 5$ et inclinatione orbitae $61°. 19'. 7'', 3$ inſtituto, pro tempore *Perihelii* hae tres habebuntur expreſſiones ſatis exacte inter ſe conſentientes: 5, 2125; 5, 2123; 5, 2116.

§. 7. Iam igitur Elementa pro orbita Cometae ſequentem in modum erunt determinata:

I. Longitudo Nodi Aſcend.	$4^s.$	1°.	10'.	26'', 3
II. Inclinatio orbitae	61.	19.	7, 3	
III. Elongatio *Perihelii* a Nodo	46.	1.	8, 5	
IV. Logar. Diſtant. *Perih.*	0, 0526066			
V. Logar. Excentric.	9, 9969824			
Logar. Semipar.	0, 3521304			

VI. Temp. *Perih.* 1773. 5, 2123 Sept. Temp. med. Pariſ.

Sicque

Sicque iam pro hoc Cometa inuenimus quidem orbitam Ellipticam, verum cuius Excentricitas adeo ſit magna, vt de tempore Periodico nihil certi adfirmari queat. Caeterum comparationem horum Elementorum cum obſeruationibus, ſequenti Tabula ob oculos ponamus:

Temp. med. Pariſ.	Longit. Comet. obſeruata.	Longit. Comet. ex calculo.
1773.		
Octob. 13. 17^h. 3$'$. 14$''$	5^s. 3°. 40$'$. 24$''$	5^s. 3°. 40$'$. 23$''$
Decb. 14. 18. 27. 50	5. 24. 52. 43	5. 24. 53. 42
1774.		
Ianuar. 10. 17. 19. 26	5. 25. 9. 28	5. 25. 6. 23
11. 17. 21. 28	5. 24. 58. 54	5. 24. 55. 37
24. 17. 31. 15	5. 21. 5. 44	5. 21. 1. 13
April. 13. 9. 18. 40	4. 16. 18. 25	4. 16. 14. 46
14. 9. 35. 25	4. 16. 15. 3	4. 16. 15. 4

Temp. med. Pariſ.	Latit. Comet. obſeruata.	Latit. Comet. ex calculo.
1773.		
Octob. 13. 17^h. 3$'$. 14$''$	3°. 21. 14$''$ A	3°. 21$'$. 14$''$ A
Dec. 14. 18. 27. 50	33. 53. 32 B	33. 53. 32 Bor.
1774.		
Ianuar. 24. 17. 31. 15	56. 50. 28	56. 51. 59
April. 13. 9. 18. 40	59. 55. 29	59. 59. 55
14. 9. 35. 25	59. 50. 43	59. 50. 44

Patet hic tribus obſeruationibus propoſitis ſatis bene ſatisfieri, niſi quod in obſeruatione die 14 Decembris inſtituta, pro Longitudine adſit error vnius Minuti primi, quod contigit quia per inaduertentiam, hanc Longitudinem vno minuto primo iuſto maiorem ſuppoſuimus. Interim tamen Elementa iam inuenta viam nobis praeparabunt ad

iſta,

iſta, quibus tres illae obſeruationes pro 13 Octob. 14 Decemb. et 14 April, perfecte implentur.

§. 8. Adhibitis itaque his tribus Hypotheſibus:

pro Longit. Nodi	$4^s.\ 1°.\ 12'.\ 0''$	$4^s.\ 1°.\ 11'.\ 0''$	$4^s.\ 1°.\ 12'.\ 0''$
pro inclinat. orbit.	$61.\ 20.\ 0$	$61.\ 20.\ 0$	$61.\ 21.\ 0$

pro tempore *Perihelii* has conſecuti ſumus expreſſiones:

$$5,0558 - 0,1287.x + 0,2296.y,$$
$$4,9124 - 0,2499.x + 0,4065.y,$$
$$4,7862 - 0,2838.x + 0,5538.y,$$

vbi x et y in partibus Minuti primi ſupponuntur expreſſi, hincque iſtae binae aequationes reſultabunt:

$$0,1434 + 0,1212.x - 0,1769.y = 0,$$
$$0,2696 + 0,1551.x - 0,3242.y = 0,$$

vnde conſequemur

$$x = + 0,10138 \text{ et } y = + 0,88008 \text{ ſiue}$$

$x = 6'',1$ circiter et $y = 52'',8$. Adhibita autem hac hypotheſi pro Longitudine Nodi $4^s.\ 1°.\ 12'.\ 6''$ et inclinatione orbitae $61°.\ 20'.\ 52'',8$, pro tempore *Perihelii* reſultabunt hae expreſſiones:

$$5,2428 - 0,1287.x + 0,2296.y,$$
$$5,2408 - 0,2499.x + 0,4065.y,$$
$$5,2345 - 0,2838.x + 0,5538.y,$$

vbi ſine ſenſibili ſaltem errore coefficientes correctionum x et y ſupra allatos retinere licebit, quod ipſi valores harum correctionum valde habeantur parui. Aequationes autem hinc reſultantes erunt:

$$+ 0,0020 + 0,1212.x - 0,1769.y = 0,$$
$$+ 0,0083 + 0,1551.x - 0,3242.y = 0,$$

quibus

quibus ſatisfit ponendo

$$x = +0,06915 \text{ et } y = +0,05868, \text{ ſiue}$$
$$x = 4'', 1 \text{ et } y = 3'', 5,$$

ex quo eſſe deberet Longitudo Nodi 4ˢ. 1°. 12′. 10″, 1 et inclinatio orbitae = 61°. 20′. 56″, 3. Caeterum calculo pro Longitudine Nodi 4ˢ. 1°. 12. 11″ et inclinatione 61°. 20′. 56″, 9 inſtituto, hi prodierunt valores pro tempore *Perihelii* 5, 2479; 5, 2478; 5, 2485, quibus ſi correctiones ex x et y reſultantes adplicentur, prodibit

$$x = -0,0116 \text{ et } y = -0,0074, \text{ ſiue}$$
$$x = -0'', 7 \text{ et } y = -0'', 4,$$

ideoque Longitudo Nodi = 4ˢ. 1°. 12′. 10″, 3 et inclinatio orbitae = 61°. 20′. 56″, 5, ita vt iam de certitudine horum Elementorum cum praeciſione fere decimarum partium ſcrupuli ſecundi ſimus conuicti.

§. 9. Elementa igitur pro orbita Cometae ſecundo loco a nobis inuenta, iſta ſequentia ſunt:

I.	Longitudo Nodi	4ˢ. 1°. 12′. 11″
II.	Inclinatio orbitae	61. 20. 57″
III.	Elongatio *Perih.* a Nodo	45. 56. 21″
IV.	Logar. Semipar.	= 0, 3530845,
V.	Logar. Excentric.	= 9, 9978766,
	Logar. Diſt. *Perih.*	= 0, 0531149,
VI.	Tempus *Perihelii*	1773. Sept. 5,2479 Temp. med. Pariſ.

Quum igitur valor pro excentricitate iam inuentus tantopere diſcrepet, ab illo priori, vt in tempore Periodico hinc prodeat diſcrepantia plusquam mille annorum, fa-

cile colligitur de tempore Periodico huius Cometae nihil definiri poſſe. Hoc enim facile quiuis largietur obſeruationi die 14 Decemb. inſtitutae errorem vnius Minuti primi quoad Longitudinem ineſſe poſſe, et ſi vel maxime haec obſeruatio eſſet exactiſſima, tamen nondum conſtat, quantum Elementa orbitae Cometae, par aliquantillos errores in obſeruationibus die 13 Octobr. et 14 Aprilis inſtitutis, commiſſos, immutentur. Caeterum de comparatione locorum Cometae ſecundum Elementa modo inventa cum obſeruatis ex ſequenti Tabula iudicari poterit:

	Temp. med. Pariſ.	Longit. Comet. obſeruata.	Longit. Comet. ex calculo.
1773.			
Octob.	13. 17^h. 3'. 14''	5^s. 3°. 40'. 24''	5^s. 3°. 40'. 24''
Decb.	14. 18. 27. 50	5. 24. 52. 43	5. 24. 52. 43
1774. Ianuar.	10. 17. 19. 26	5. 25. 9. 28	5. 25. 4. 41
	11. 17. 21. 28	5. 24. 58. 54	5. 24. 53. 52
	24. 17. 31. 15	5. 21. 5. 44	5. 20. 59. 51
Febr.	6. 11. 0. 49	5. 14. 26. 47	5. 14. 24. 55
April.	3. 8. 29. 57	4. 17. 3. 26	4. 16. 51. 41
	11. 9. 58. 57	4. 16. 31. 23	4. 16. 16. 36
	13. 9. 18. 40	4. 16. 18. 25	4. 16. 14. 54''
	14. 9. 35. 25	4. 16. 15. 3	4. 16. 15. 3

	Temp. med. Pariſ.	Latit. Comet. obſeruata.	Latit. Comet. ex calculo.
1773.			
Octob.	13. 17^h. 3'. 14''	3°. 21. 14'' A	3°. 21'. 14'' A
Dec.	14. 18. 27. 50	33. 53. 32 B	33. 53. 32 Bor.
Ianuar.	10. 17. 19. 26	50. 3. 20	50. 3. 3
	11. 17. 21. 28	50. 35. 22	50. 35. 17
	24. 17. 31. 6	56. 50. 28	56. 51. 42
Febr.	6. 11. 0. 49	61. 16. 57	61. 20. 19
April.	3. 8. 29. 57	61. 24. 59	61. 29. 35
	13. 9. 18. 40	59. 55. 29	59. 59. 53
	14. 9. 35. 25	58. 50. 43	59. 50. 43

§. 10.

§. 10. Ex his igitur Elementis quia liquet obſeruationes diebus 3 et 11 Aprilis inſtitutas, nequaquam conciliari poſſe cum obſeruationibus diebus 13 et 14 factis, operae pretium duxi, vt examinarem, quaenam prodire debeant Elementa Cometae ſi loco obſeruationis die 14 Aprilis inſtitutae, adhibeatur obſeruatio pro die 3 Aprilis. Suppoſitionibus igitur ſequentibus pro Longitudine Nodi et inclinatione orbitae factis:

pro Longitudine Nodi	$4^s. 1°. 13'$	$4^s. 1°. 14'$	$4^s. 1°. 14'$
Inclinatione orbitae	61. 18	61. 18	61. 18 30''

pro tempore *Perihelii* hi inuenti ſunt valores:

$$5,2658 - 0,1362.x + 0,1202.y,$$
$$5,0828 - 0,2620.x + 0,2058\ y,$$
$$4,9865 - 0,3091.x + 0,2777.y,$$

poſito quod x exprimatur in partibus minuti primi, y autem in partibus ſemiſſis Minuti primi, vnde hae prodeunt aequationes:

$$+0,1830 + 0,1258.x - 0,0856.y = 0,$$
$$+0,2793 + 0,1729.x - 0,1575.y = 0,$$

quibus ſatisfit ponendo

$$x = -0,98055 \text{ et } y = 0,69679, \text{ ſiue}$$
$$x = -58,8 \text{ et } y = +20'',9,$$

ita vt eſſe deberet Longitudo Nodi $4^s. 1°. 13'. 1'',2$ et inclinatio orbitae $61°. 18'. 20'',9$. Tum pro hypotheſi Longitudinis Nodi $4^s. 1°. 13'$ et inclinationis orbitae, $61°. 18'. 20''$ hae erunt expreſſiones pro tempore *Perihelii*:

$$5,4799 - 0,1362.x + 0,1202.y,$$
$$5,4822 - 0,2620.x + 0,2058.y,$$
$$5,4805 - 0,3091.x + 0,2777.y,$$

 vnde

vnde iſtae colliguntur aequationes:

$$-0,0023 + 0,1258 . x - 0,0856 . y = 0,$$
$$-0,0006 + 0,1729 . x - 0,1575 . y = 0,$$

quae implentur ponendo

$$x = +0,062 \text{ et } y = 0,064,$$

ita vt ſit Longitudo Nodi $4^s. 1^\circ. 13'. 4''$ et inclinatio orbitae $= 61^\circ. 18'. 22''$.

§. 11. Hinc pro Elementis orbitae ſequentium vſum fecimus determinationum:

I. Longitudo Nodi Aſcend.	4^s.	1°.	$13'$.	$4''$,
II. Inclinatio orbitae		61.	18.	22,
III. Elongatio *Perihelii* a Nodo		45.	44.	47,
IV. Logar. Semiparam.		0, 3553486		
V. Logar. Excentric.		0, 0016078		
VI. Tempus *Perihel.* = 5, 4791 Sept. Temp. med. Pariſ.				

quibus adhibitis, ſequentes habentur locorum Cometae calculo inuentorum, cum obſeruatis comparationes:

Temp.

Latit. Com. obſeruata.	Latit. ex calculo.	differ.
3°. 58′. 14″ A	3°. 54′. 49″	− 3′. 25″
3. 21. 14	3. 21. 14	
2. 52. 39	2. 49. 22	− 3′. 17
Bor. 5	3. 12	+ 3. 7
7. 26. 44	7. 29. 10	+ 2. 26
12. 47. 52	12. 49. 45	+ 1. 53
20. 41. 41	20. 42. 55	+ 1. 14
30. 44. 10	30. 44. 31	+ 21
33. 53. 32	33. 53. 33	+ 1
43. 46. 0	43. 45. 18	− 42
50. 3. 20	50. 0. 27	− 2. 53
55. 32. 9	55. 28. 40	− 3. 29
61. 16. 57	61. 14. 56	− 2. 1
63. 38. 0	63. 30. 29	− 7. 31
64. 24. 36	64. 23. 15	− 1. 21
63. 46. 31	63. 42. 58	− 3. 33
61. 24. 59	61. 24. 59	
60. 9. 50	60. 13. 22	+ 3. 22
60. 3. 0	60. 4. 38	+ 1. 38
59. 50. 43	59. 46. 31	− 4. 12

§. 12,

		Temp. med. Pariſ.		Longit. Com. obſeruata.	Longit. Com. ex calculo.	differ.	Latit. Com. obſeruata.	Latit. ex calculo.	differ.
1773.	Octobr.	12.	17ʰ. 10′. 10″	5ˢ. 3°. 10′. 57″	5ˢ. 3°. 11′. 49″	+ 52″	3°. 58′. 14″ A	3°. 54′. 49″	− 3′. 25″
		13.	17. 3. 14	5. 3. 40. 24	5. 3. 40. 23	− 1	3. 21. 14	3. 21. 14	
		14.	15. 41. 3	5. 4. 6. 31	5. 4. 7. 18	+ 47	2. 52. 39	2. 49. 22	− 3′. 17
		19.	17. 38. 43	5. 6. 28. 50	5. 6. 28. 54	+ 4	Bor. 5	3. 12	+ 3. 7
	Nou.	1.	16. 2. 36	5. 12. 2. 32	5. 12. 2. 17	− 15	7. 26. 44	7 29. 10	+ 2. 26
		10.	16. 39. 32	5. 15. 31. 13	5. 15. 34. 25	+ 3′. 12	12. 47. 52	12. 49. 45	+ 1. 53
		23.	17. 31. 22	5. 19. 56. 13	5. 19. 57. 24	+ 1. 11	20. 41. 41	20. 42. 55	+ 1. 14
	Dec.	9.	18. 30. 9	5. 23. 59. 10	5. 23. 59. 29	+ 19	30. 44. 10	30. 44. 31	+ 21
		14.	18. 27. 50	5. 24. 52. 43	5. 23. 52. 44	+ 1	33. 53. 32	33. 53. 33	+ 1
		30.	18. 9. 52	5. 26. 6. 23	5. 26. 4. 46	− 1. 37	43. 46. 0	43. 45. 18	− 42
1774.	Ianuar.	10.	17. 19. 26	5. 25. 9. 28	5. 25. 4. 41	− 4. 47	50. 3. 20	50. 0. 27	− 2. 53
		21.	17. 20. 58	5. 22. 10. 9	5. 22. 9. 53	− 16	55. 32. 9	55. 28. 40	− 3. 29
	Febr.	6.	11. 0. 49	5. 14. 26. 57	5. 14. 27. 5	+ 8	61. 16. 57	61. 14. 56	− 2. 1
		17.	8. 8. 18	5. 7. 24. 17	5. 7. 20. 49	− 3. 28	63. 38. 0	63. 30. 29	− 7. 31
	Mart.	1.	7. 52. 28	4. 29. 18. 48	4. 29. 24. 35	+ 5. 47	64. 24. 36	64. 23. 15	− 1. 21
		15.	8. 20. 18	4. 21. 59. 57	4. 22. 4. 2	+ 4. 5	63. 46. 31	63. 42. 58	− 3. 33
	April.	3.	8. 29. 57	4. 17. 3. 26	4. 17. 3. 27	+ 1	61. 24. 59	61. 24. 59	
		11.	9. 58. 57	4. 16. 31. 23	4. 16. 28. 2	− 3. 21	60. 9. 50	60. 13. 22	+ 3. 22
		12.	9. 23. 14	4. 16. 25. 20	4. 16. 26. 48	+ 1. 28	60. 3. 0	60. 4. 38	+ 1. 38
		14.	9. 35. 25	4. 16. 15. 3	4. 16. 26. 20	+ 11. 17	59. 50. 43	59. 46. 31	− 4. 12

§. 12.

§. 12. Ex hoc calculo nunc liquet, obſeruationes verſus vltimam Cometae apparitionem factas adeo inter ſe diſcrepare, vt ſumma errorum poſitiuorum et negatiuorum, quiudecim fere minutis primis pro Longitudine aequetur, quales quidem errores eo magis locum habere potuerunt, quod lumen Cometae adeo debile fuerit, vt Cel. Meſſier non niſi ſumma cum difficultale licuerit, loca huius Cometae aſſignare. Caeterum quum facile fieri queat, vt tota haec errorum quantitas non in vnica harum obſeruationum vtpote vel illa, quae die 14 Aprilis, vel quae die 11 Aprilis facta eſt, reperiatur; omnino colligitur valorem excentricitatis pro hac orbita adeo eſſe incertum, vt pro caſu a nobis iam conſiderato, ſpecies orbitae euadat Hyperbolica. Tum vero quia iam conſiderauimus quas mutationes orbita ſubeat, propter errores obſeruationum die 14 Dec. et menſe Aprilis inſtitutarum; haud praeter rem erit, ſi examinemus quoque quaenam prodeant Elementa Cometae ſi loco obſeruationis die 13 Octobr. inſtitutae, adhibeatur illa pro 12 Octobr., quam etiam ex aliis circumſtantiis exactiorem eſſe, concludere licet.

§. 13. Primum igitur conſtitutis his tribus hypotheſibus:

Pro Long. Nodi:	$4^s.\ 1°.\ 10'$;	$4^s.\ 1°.\ 15'$;	$4^s.\ 1°.\ 15'$,
Pro Incl. orbitae	61. 18;	61. 18;	61. 20',

pro tempore *Perihelii* hae orientur expreſſiones:

$$5,3810 - 0,1252.\,x + 0,2231.\,y,$$
$$5,0603 - 0,2477.\,x + 0,4000.\,y,$$
$$5,1834 - 0,2961.\,x + 0,5563.\,y,$$

vbi x et y in partibus Minuti primi, intelligentur expreſſi. Aequationes autem hinc reſultantes erunt:

$$0,3207 + 0,1225.x - 0,1769.y = 0,$$
$$0,1976 + 0,1709.x - 0,3322.y = 0,$$

quibus ſatisfieri inuenimus, ponendo

$$x = -6,7929 = -6', 47'', 5 \text{ et}$$
$$y = -2,89109 = -2'. 53'', 5,$$

ita vt eſſe debeat Longitudo Nodi $4^s. 1°. 8'. 12'', 5$ et Inclinatio orbitae $= 61°. 15'. 6'', 5$. Vt vero hi valores accuratius inueniantur noua opus eſt approximatione, quem in finem ponendo Longitudinem Nodi $= 4^s. 1°. 8'$ et inclinationem orbitae $= 61°. 15'.$, calculo peracto ad has pro tempore *Perihelii* perueniemus expreſſiones:

$$5,5907 - 0,1252.x + 0,2231.y,$$
$$5,5979 - 0,2477.x + 0,4000.y,$$
$$5,5848 - 0,2961.x + 0,5563.y,$$

ſcilicet pro correctionibus x, y coefficientes ſupra inuentos, retinendos exiſtimauimus, praecipue vbi ſumma exactitudo vsque decimarum partium ſcrupuli ſecundi non deſideratur. Aequationes autem hinc oriundae ſunt:

$$-0,0072 + 0,1225.x - 0,1769.y = 0,$$
$$+0,0059 + 0,1709.x - 0,3332.y = 0,$$

quibus ſatisfit, ſtatuendo

$$x = +0,32525 = +19'', 5 \text{ et}$$
$$y = +0,18453 = +11'', 1.$$

§. 14. Hinc igitur pro orbita Cometae obſeruationibus die 12 Octobr. 14 Decemb. et 12 Aprilis inſtitutis ſatisfaciente, ſequentia habentur Elementa:

I. Lon-

		Temp. med. Pariſ.	Longit. Com. obſeruata.	Longit. Com. ex calculo.	differ.	Latit. Com. obſeruata.	Latit. ex calculo.	differ.
	Octobr.	12. 17^h. 10$'$. 10$''$	5^s. 3°. 10$'$. 57$''$	5^s. 3°. 10$'$. 59$''$	+ 2$''$	3°. 58$'$. 14$''$ A	3°. 58$'$. 15$''$	+ 1$''$
		13. 17. 3. 14	5. 3. 40. 24	5. 3. 39. 35	— 49	3. 21. 14	3. 24. 35	+ 3$'$. 21
		14. 15. 41. 3	5. 4. 6. 31	5. 4. 6. 29	— 2	2. 52. 23	2. 52. 39	+ 16
		19. 17. 38. 43	5. 6. 28. 50	5. 6. 27. 55	— 55	Bor. 5	Bor. 9	+ 4
		25. 16. 16. 57	5. 9. 5. 26	5. 9. 6. 37	+ 1. 11	3. 22. 43	3 24. 8	+ 1. 25
	Nou.	1. 16. 2. 36	5. 12. 2. 32	5. 12. 1. 53	— 39	7. 26. 44	7. 27. 14	+ 30
		10. 16. 39. 32	5. 15. 31. 13	5. 15. 34. 10	+ 2. 57	12. 47. 52	12. 48. 17	+ 25
		23. 17. 31. 22	5. 19. 56. 13	5. 19. 55. 7	— 1. 6	20. 41. 41	20. 42. 21	+ 40
	Dec.	9. 18. 30. 9	5. 23. 59. 10	5. 23. 59. 36	+ 26	30. 44. 10	30. 44. 27	— 17
		14. 18. 27. 50	5. 24. 52. 43	5. 24. 52. 42	— 1	33. 53. 32	33. 53. 32	— 0
		30. 18. 9. 52	5. 26. 6. 23	5. 26. 4. 30	— 1. 53	43. 46. 0	43. 45. 43	— 17
1774.	Ianuar.	10. 17. 19. 26	5. 25. 9. 28	5. 25. 3. 48	— 5. 40	50. 3. 20	50. 0. 56	— 2. 24
		21. 17. 20. 58	5. 22. 10. 9	5. 22. 8. 51	— 1. 18	55. 32. 9	55. 29. 16	— 2. 53
	Febr.	6. 11. 0. 49	5. 14. 26. 57	5. 14. 24. 59	— 1. 58	61. 16. 57	61. 15. 17	— 1. 40
		11. 11. 23. 58	5. 11. 18. 9	5. 11. 14. 40	— 3. 29	62. 28. 44	62. 28. 31	— 13
		17. 8. 8. 18	5. 7. 24. 17	5. 7. 18. 8	— 6. 9	63. 38. 0	63. 30. 26	— 7. 34
		20. 10. 22. 51	5. 5. 14. 2	5. 5. 10. 57	— 3. 5	63. 59. 7	63. 53. 6	— 6. 1
	Mart.	1. 7. 52. 28	4. 29. 18. 48	4. 29. 21. 44	+ 2. 56	64. 24. 36	63. 22. 44	— 1. 52
		15. 8. 20. 18	4. 21. 59. 57	4. 22. 1. 30	+ 1. 33	63. 46 31	63. 45. 10	— 1. 21
		19. 9. 20. 15	4. 20. 30. 43	4. 20. 29. 0	— 1. 43	63. 26. 26	63. 20. 54	— 5. 32
	April.	2. 7. 55. 49	4. 17. 14 50	4. 17. 9. 37	— 5. 13	61. 35. 3	61. 32. 30	— 2. 33
		3. 8. 29. 57	4. 17. 3. 26	4. 17. 1. 34	— 1. 52	61. 24. 59	61. 23. 34	— 1. 25
		4. 8. 25. 21	4. 16. 53. 19	4. 16. 54. 47	+ 1. 28	61. 15. 14	61. 14. 56	— 18
		5. 8. 12. 30	4. 16. 51. 45	4. 16. 48. 37	— 3 8	61. 10. 6	61. 6. 13	— 3. 53
		11. 9. 58. 57	4. 16. 31. 23	4. 16. 26. 21	— 4. 32	60. 9. 50	60. 11. 54	+ 2. 4
		12. 9. 23. 14	4. 16. 25. 20	4. 16. 25. 21	+ 1	60. 3. 0	60. 3. 1	+ 1
		13. 9. 18. 40	4. 16. 18. 25	4. 16. 24. 36	+ 6. 11	59. 55 29	59. 54. 4	— 1. 25
		14. 9. 35. 25	4. 16. 15. 3	4. 16. 24. 51	+ 9. 48	59. 50. 43	59. 44. 53	— 5. 50

Reliquas

I.	Longitudo Nodi	$= 4^s. \ 1^\circ. \ 8'. \ 20''$,
II.	Inclinatio orbitae	$61^\circ. \ 15'. \ 11''$,
III.	Elongatio *Perihelii* a Nodo	$45^\circ. \ 51'. \ 20''$,
IV.	Logar. ſemiparam.	$= 0, 3539907$,
V.	Logar. Excentric.	$= 0, 0010801$,
VI.	Temp. *Peribel.* = 5, 5911 Sept. Temp. medio Pariſino.	

Ideoque etiam in his Elementis orbita Cometae adhuc dum manet Hyperbolica, excentricitate tamen aliquanto minore quam in Elementis proxime praecedentibus. Vt de exactitudine horum Elementorum eo facilius ſit iudicium, locorum Cometae calculo inuentorum cum obſeruatis, ſequenti Tabula dabimus comparationem.

Temp.

Reliquas obſeruationes a Cel. Meſſier inſtitutas cum Elementis comparare ſuperfluum duximus, quippe quum ex his modo allatis, facile diiudicari queat, quales habeantur errores obſeruationum, pro temporibus, momentis obſervationum allatarum interiacentibus.

§. 15. Si haec Elementa cum praecedentibus conferantur, primum patet Elementa vltima obſeruationibus initio menſis Octobris melius ſatisfacere ac iſta priora, imprimis quoad tranſitum Cometae per Nodum egregius calculi cum obſeruatione habetur conſenſus. Pro obſervationibus menſe Nouembris et Decembris inſtitutis vtraque haec Elementa fere aeque bene cum obſeruationibus conſpirant, quod etiam valet de obſeruationibus menſe Ianuarii Anni 1774. inſtitutis. Quum obſeruationes initio menſis Februarii, ſatis exacte cum Elementis congruant, inexſpectatum euenit, quod pro obſeruationibus diebus 17 et 20 Febr. inſtitutis, tantus ſit Elementorum ab obſeruatione praeſertim in Latitudine Cometae diſſenſus. Facile igitur crediderim huius rei cauſſam in eo eſſe quaerendam, quod aliquis forſan error ſit commiſſus in determinanda poſitione ſtellae 48 Vrſae maioris, cum qua Cometa diebus commemoratis fuit comparatus, praeſertim quia obſeruationes initio menſis Martii inſtitutae tantis erroribus non habeantur obnoxiae. Caeterum pro Elementis vltimo loco commemoratis, ſumma errorum pro obſeruationibus menſe Aprilis inſtitutis, aeque fere magna erit, ac caſu priori, quippe quum haec ſumma nunc aequatur 14 circiter Minutis primis. Ex omnibus vero noſtris calculis inter ſe collatis, intelligitur quaecunque demum pro orbita Cometae eligantur Elementa, ſummam

iſtorum

iſtorum errorum vix vllam ſenſibilem admittere diminutionem.

§. 16. Etiamſi ex binis noſtris calculis poſterioribus deducatur orbita Cometae Hyperbolica, tamen minime inde inferre licet, huic Cometae reapſe eiusmodi competere orbitam. Primum enim obſeruare licebit, excentricitatis valorem valde diminui, ſi obſeruationes diebus 13 et 14 Aprilis inſtitutae minus reddantur erroneae ac in his calculis factum eſt. Etenim Elementa noſtra ſecundo et tertio loco propoſita, obſeruationibus dieb. 13 Octobr. et 14 Dec. ſatisfaciunt, pro obſeruatione vero die 14 April. facta, habetur Elementorum ſecundorum perfectus conſenſus cum obſeruatione, dum iuxta Elementa tertia obſeruationi huic 11 Min. prim. error ineſſe deberet. At ſecundum Elementa ſecunda eſt excentricitas 0,9951222, et ſecundum elementa tertia 1,0037090, ita vt pro errore 11 Min. prim. in obſeruatione die 14 April. habeatur variatio excentricitatis 0,0085868, hinc pro errore vnius minuti primi 0,0007806 et pro errore quinque Minut. primorum 0,0039031; etiamſi enim haec non prorſus exacte veritati ſint conſentanea, tamen nec enormiter abludent.

§. 17. Deinde ex comparatione Elementorum noſtrorum primorum cum ſecundo loco propoſitis, intelligitur errorem vnius Minuti primi, pro obſeruatione die 14 Decemb. inſtituta, inſignem habere effectum ad excentricitatem orbitae immutandam. Nam ſecundum Elementa prima eſt excentricitas = 0.9930757, quae a valore in ſecundis Elementis inuenta, differt quantitate 0,0020465.

 Iam

Iam ſi pro Elementis quartis vbi excentricitas 0,0024901, ſupponamus primum, obſeruationem die 14 Aprilis 5 Minutis primis minus eſſe erroneam, quam ex his Elementis inuenitur, tum vero ſtatuatur Longitudinem Cometae pro die 14 Dec. duobus minutis primis eſſe augendam, hinc excentricitas diminuetur quantitate

$$+ 0,0039031 + 0,0040930 + 0,0079961,$$

ita vt hac pro hypotheſi futura ſit 0,9944939, ideoque minor ac in Elementis noſtris ſecundis. Quicquid autem ſit de his correctionibus, ſaltem ex hoc ratiocinio liquido patet, pro noſtro Cometa de tempore eius Periodico vix quidquam cum aliqua veritatis ſpecie definiri poſſe.

§. 18. Quod autem Cel. *Lambert* ex obſeruationibus, diebus 15 Nou. 10 Dec. et 4 Ian Berolini inſtitutis ad orbitam perductus ſit Elipticam, id ſine dubio erroribus harum obſeruationum adſcribendum eſt; quippe quum ex comparatione illarum, cum iſtis, quas Cel. Meſſier debemus, conſtet, pro obſeruatione die 15 Nou. facta, in Latitudine errorem certe adeſſe 15 Minut. primorum. Tum vero pro obſeruatione die 4 Ianuar. inſtituta, in Longitudine error certe habebitur 20 Minutorum primor. Quin autem huiusmodi errores inſignem habere queant effectum ad naturam orbitae immutandam, pro illis imprimis caſibus, vbi portio orbitae a Cometa deſcriptae valde fuerit exigua, nullum prorſus eſt dubium, pro caſu autem praeſenti portio orbitae inter 15 Nouemb. et 4 Ianuar. deſcriptae, ne angulo quidem 30° circa Solem deſcripto reſpondebat. Eandem vero ob rationem Elementa pro orbita Cometae ex obſeruationibus dier. 15 Nou.

Nou. 5 Ianuar et 17 Febr. partim per conſtructionem, partim per calculum eruta, et quorum mentio iniicitur in Ephemeridibus Berolinenſibus, non poſſunt non valde eſſe dubia. De eo autem vt certior fierem iuxta Elementa a Cel. *Schulze* tradita, locum Cometae pro 19 Octobr. 17^h $38'$. $43''$ computaui, quippe quum Cometa hoc tempore in vicinia Nodi verſaretur. Inueni autem per calculum Longitudinem Cometae Geocentricam 5^s. $6°$. $52'$. $8''$, quae obſeruatam 23 Minut. primis excedit, Latitudo vero Geocentrica inuenta eſt $1°$. $20'$. $36''$, cum obſeruata non eſſet niſi $5''$. Ex hoc igitur ſpecimine facile colligi poteſt, quam longe Elementa in Ephemeridibus Berolinenſibus tradita a veritate recedant, praeprimis quia die 19 Octobr. tres habentur obſeruationes a Cel. Meſſier inſtitutae, quae non ſolum inter ſe egregrie conſentiunt, ſed etiam congruunt cum obſeruationibus diebus praecedentibus et inſequentibus, inſtitutis.

§. 19. Ex comparatione Elementorum noſtrorum ſecundo et tertio loco propoſitorum, quoque concludi poteſt de mutationibus, quae Elementis inducuntur propter errores in obſeruationibus menſe Aprilis inſtitutis latentes. Suppoſito igitur quod variatio pro Longitudine Cometae die 14 Aprilis ſit 11 Min. Primor. et pro Latitudine 4 Min. primorum, vbi poſterior contrariam priori habet denominationem; in Longitudine Nodi producetur mutatio vnius Minut. primi, in inclinatione orbitae mutatio erit duor. Minut. primorum cum dimidio, pro Elongatione *Perihelii* a Nodo variatio erit 11 Minut. primor. Valor ſemiparametei mutabitur quantitate $= 0,0117853$, de variatione Excentricitatis iam ſupra vidimus, denique in

tem-

tempore *Perihelii* reſultabit mutatio 0,2312, id eſt $5^h. 32'$. Si Elementa prima cum ſecundis conferantur, patebit quantum effectum variatio vnius Minuti primi, in Longitudine Cometae die 14 Decemb. obſeruata, habeat pro mutandis Elementis Cometae, ſcilicet Longitudo Nodi $1'. 45''$ mutabitur, inclinatio orbitae $1'. 50''$, elongatio *Perihelii* a Nodo $4'. 47''$. Valor ſemiparametri quantitate 0,0049479 variabitur, et denique pro tempore *Perihelii* habebitur mutatio 0,0356, id eſt $51'$ circiter. Iam ſi quoque Elementa noſtra tertia cum vltimis conferantur, vbi principalis variatio ex errore in obſeruatione diei 13 Octobr. commiſſo, reſultabit: Primum pro Longitudine Nodi variatio eſt 5 fere Minut. primor, pro inclinatione orbitae 3 Minut. prim., et pro elongatione *Perih.* a Nodo 7 Minut. In valore ſemiparametri erit variatio = 0,0070858 et pro tempore *Perihelii* 0,1120, hoc eſt 2 hor. $41'$. Quamuis autem ex his comparationibus non praeciſe determinari queat, quantum ſingularum obſeruationum errores ſiue in Longitudine ſiue in Latitudine commiſſi, efficiant ad mutanda Elementa Cometae; tamen pro noſtro inſtituto ſufficit, quod inde haud obſcure iudicari queat, de praeciſione noſtris Elementis tribuenda. Hinc igitur, quia errores in obſeruationibus Menſe Aprilis inſtitutis commiſſi valde parum mutant, in poſitione Longitudinis Nodi et inclinationis orbitae; de obſeruationibus autem die 12 Octobr. et 14 Decemb. veriſimiliter colligere licet, quod grauioribus erroribus non eſſe queant obnoxiae, generatim concludere poſſumus: valores pro Longitudine Nodi et inclinatione orbitae in Elementis noſtris vltimis inuentos, ſaltem cum praeciſione trium aut quatuor Minut. primorum cum veritate conſentire. De elongatione

autem

autem *Perihelii* a Nodo, vt etiam valore ſemiparametri et excentricitatis paullo maior erit incertitudo.

§. 20. Siquidem exemplo huius Cometae iam comprobatum ſit, fieri vtique poſſe, vt errores praegrandes in determinandis Longitudinibus et Latitudinibus huiusmodi Aſtrorum committi queant; aequum eſt vt nonnulla moneamus de dubio, quod ex hoc capite proponi poſſet contra noſtram determinationem pro tempore Periodico Cometae An. 1770 obſeruati, de quo nimirum conſtat, quod vltimo tempore ſuae apparitionis, non niſi cum magna difficultate obſeruari potuerit, vnde facile contingere potuit, vt obſeruationibus diebus praeſertim 29 Sept. 1 et 2 Octob. inſtitutis, errores inſigniores ineſſe queant. Ad haec igitur reſpondemus, ſi de ſola poſſibilitate ſermo ſit, tum etſi negare non ſuſtineamus fieri posſe, vt his obſeruationibus ſenſibiles inſint errores, tamen eam ſolum ob rationem non aequum eſſe, vt Elementa orbitae reiiciantur, quae non modo his, ſed reliquis obſeruationibus adprime ſatisfaciunt. Deinde etiamſi his obſeruationibus quidam ineſſent errores, tamen adeo inſignes eſſe nequeunt, vt tempus Periodicum decem annorum admitti poſſet, praeſertim quia tum reliquae obſeruationes menſe Septembris inſtitutae plus vel minus redderentur erroneae. Denique ſi omnium circa hunc Cometam inſtitutarum obſeruationum habeatur reſpectus, praetermiſſis ſolum vltimis tribus Cometae obſeruationibus, vix ac ne vix quidem orbita elliptica pro tempore Periodico ſeptem annorum inueniri poterit, ſingulis obſeruationibus ita ſatisfaciens, vt errores non prodeant decem Minut. primorum pro obſeruationibus Menſe Auguſti inſtitutis, quales erro-

res pro his obſeruationibus vix vllam inueniunt fidem. Caeterum cuiuis facile perſpicuum eſt, in huiusmodi disquiſitionibus obſeruationum exactitudinem praeſupponi, ideoque Aſtronomum huiusmodi quaeſtionem agitantem ea ſequi, quae ſecundum obſeruationes ipſi veriſimilia videntur, nec ipſi permiſſum eſſe, vt obſeruationes errorum inculpat, vbi nullum indicium errorum appareet.

DE PERTVRBATIONE IN MOTV TELLVRIS AB ACTIONE VENERIS ORIVNDA.

Auctore

A. I. LEXELL.

§. 1.

Cum Illuſtris *Eulerus* in Nou. Comment. Tom. XVI. nouam et ſingularem tradidiſſet Methodum pro determinanda perturbatione in motu telluris, ab actione Veneris, meaque opera tum vſus ſit, ad computandam Tabulam pro iſta perturbatione, quae quia valde diſcrepans inuenta eſt, ab iis numeris, quos Celeb. de la *Caille* et *Tobias Mayerus* aliis principiis inſiſtentes, inuenerunt; merito ſuſpicio oborta eſt, an diuerſitati Methodorum, vtrum vero errori in calculis commiſſo, haec diſcrepantia tribuenda eſſet. Dum igitur nuper illuſtris *Galliae* Mathematicus *de la Place*, Celeb. de la *Lande* eum hac de re ſciſcitanti, in litteris priuatis mentem expoſuiſſet, ſimulque rogaſſet vt Illuſtriſſimus *Eulerus* et ego de hac quaeſtione ſententiam noſtram exponeremus; quum principalis ratio huius diſcrepantiae errori in calculis *a me* commiſſo

miſſo adſcribenda ſit, mearum partium eſſe iudicaui, ea in quibus tum erratum eſt corrigendi, ſimulque materiam hanc omni qua fieri poteſt exactitudine tractandi; quo ſcilicet nullum dubium animis Aſtronomorum infixum reſideat, quin diuerſis iſtis Methodis pro hoc inſtituto traditis, concluſiones inter ſe conformes et amicae inueniantur.

§. 2. Inclinatio orbitae Veneris ad Eclipticam quum valde ſit parua, facile quidem intelligitur in hoc negotio huius inclinationis conſiderationem plane ſeponi poſſe, adeoque quaeſtionem ita tractari poſſe, quaſi Venus orbitam ſuam in ipſo plano Eclipticae deſcriberet. Supponamus igitur loca Solis, Veneris et Telluris, reſpectiue per litteras S, V et T deſignari, ductaque linea SX
T. XVIII. ad quam loca Veneris et Telluris, coordinatis VU, SU;
Fig. 5. TX, SX referantur, dicantur lineae $SX = x$; $TX = y$; $ST = u$; $SV = v$; $VT = w$, anguli $TSX = \Phi$; $VSX = \psi$ et $VST = p$; tum vero maſſae Solis, Veneris et Telluris reſpectiue litteris S, V et T exprimantur.

§. 3. In Syſtemate igitur trium horum Planetarum, primum liquet, terram ad Solem vrgeri, ſecundum directionem TS vi $= \frac{S}{uu}$, tumque ad Venerem ſecundum directionem VT vi $= \frac{V}{ww}$. Atqui quum in noſtra disquiſitione Solem in quiete ſupponere conueniens ſit, vires quibus Sol, ab actione Veneris et Telluris afficitur, contraria directione in Tellurem transferemus, vnde ducta linea TP ipſi SV parallela, Terra vrgebitur ſecundum TP vi $= \frac{V}{vv}$ et ſecundum TS vi $= \frac{T}{uu}$; adeoque in

in vniuerſum terra tribus vrgebitur viribus, *primo* in directione T S, vi $= \frac{S+T}{uu}$; *ſecundo* in directione T V, vi $= \frac{V}{ww}$ et *tertio* in directione T P, vi $= \frac{V}{vv}$. Nunc has tres vires in binas alias, ſecundum directiones coordinatarum T X, X S agentes reſoluamus, vnde conſequemur:

vim ſecundum T X

$$= \frac{S+T}{uu}.\ \text{ſin.}\ \Phi + \frac{V}{vv}\ \text{ſin.}\ \psi + \frac{V}{w^3}\ (y - v\ \text{coſ.}\ \psi),$$

vim ſecundum X S

$$= \frac{S+T}{uu}.\ \text{coſ.}\ \Phi + \frac{V}{vv}\ \text{coſ.}\ \psi + \frac{V}{w^3}\ (x - v\ \text{coſ.}\ \psi).$$

Ducta enim T Q parallela ipſi S X, liquet vim ſecundum T V agentem reſolui in binas ſecundum T Q, V Q; quae ſunt ad iſtam ſecundum T V, vti T Q : T V et — V Q : T V; hoc eſt:

$$x - v\ \text{coſ.}\ \psi : w = SX - SU : TV,\ \text{et}$$
$$y - v\ \text{ſin.}\ \psi : w = TX - VU : TV.$$

§. 4. Inuentis igitur viribus ſecundum directiones T X, X S agentibus, per principia Mechanica habebimus:

$$\frac{ddx}{\alpha\, d\tau^2} + \frac{S+T}{uu}\ \text{coſ.}\Phi + \frac{V}{vv}\ \text{coſ.}\ \psi + V\ \frac{(x - v\ \text{coſ.}\ \psi)}{w^3} = 0,$$
$$\frac{ddy}{\alpha\, d\tau^2} + \frac{S+T}{uu}\ \text{coſ.}\ \Phi + \frac{V}{vv}\ \text{ſin.}\ \psi + V\ \frac{(y - v\ \text{ſin.}\ \psi)}{w^3} = 0,$$

deſignante $d\tau$ elemento temporis. Quum vero ſit

$$x = u\ \text{coſ.}\ \Phi\ \text{et}\ y = u\ \text{ſin.}\ \Phi;\ \text{fiet}$$

$$dx = du\ \text{coſ.}\Phi - u\, d\Phi\ \text{ſin.}\Phi;\ dy = du\ \text{ſin.}\Phi + u\, d\Phi\ \text{coſ}\ \Phi,$$

vnde conſequemur

$$dx\ \text{coſ.}\Phi + dy\ \text{ſin.}\Phi = du;\ \text{et}\ dy\ \text{coſ.}\Phi - dx\ \text{ſin.}\Phi = + u\, d\Phi.$$

Porro differentiando priorem harum aequationum, obtinebimus

$$ddx\,\text{coſ.}\,\Phi + ddy\,\text{ſin.}\,\Phi + d\Phi(dy\,\text{coſ.}\,\Phi - dx\,\text{ſin.}\,\Phi) = ddu,$$

hincque

$$ddx\,\text{coſ.}\,\Phi + ddy\,\text{ſin.}\,\Phi = ddu - u\,d\Phi^2;$$

tumque iterum differentiando poſteriorem

$$ddy\,\text{coſ.}\,\Phi - ddx\,\text{ſin.}\,\Phi - d\Phi(dx\,\text{coſ.}\,\Phi + dy\,\text{ſin.}\,\Phi)$$
$$= u\,dd\Phi + du\,d\Phi,\ \text{ſeu}$$

$$ddy\,\text{coſ.}\,\Phi - ddx\,\text{ſin.}\,\Phi = u\,dd\Phi + 2\,du\,d\Phi.$$

Facta igitur eiusmodi combinatione differentialium ddx, ddy vti in aequationibus modo inuentis praeſcribitur, fiet:

$$\frac{ddu - u\,d\Phi^2}{\alpha\,d\tau^2} = -\left(\frac{S+T}{u^2} + \frac{V\,\text{coſ.}\,p}{vv} + \frac{V(u + v\,\text{coſ.}\,p)}{w^3}\right).$$
$$\frac{u\,dd\Phi + 2\,du\,d\Phi}{\alpha\,d\tau^2} = -\frac{V\,\text{ſin.}\,p}{v^2} + \frac{V\,v\,\text{ſin.}\,p}{w^3}.$$

§. 5. Primum igitur vt conſiderationem elementi temporis eliminemus, ſupponamus orbitam Telluris eſſe circularem, ideoque $u = a$ conſtanti, tumque $d\Phi = dt$ et $dd\Phi = 0$; quare fiet

$$\frac{-u\,d\Phi^2}{\alpha\,d\tau^2} = \frac{-a\,dt^2}{\alpha\,d\tau^2} = \frac{-S+T}{a^2};\ \text{hincque}$$
$$\alpha\,d\tau^2 = \frac{a^3\,dt^2}{S+T}.$$

Tum vero vt conſiderationem maſſarum plane negligere queamus, ponamus $\lambda = \frac{V}{S+T}$, et ſtatuamus inſuper $a = 1$. His igitur valoribus introductis, noſtrae aequationes erunt:

$$\frac{ddu - u\,d\Phi^2}{dt^2} = -\frac{1}{u^2} - \frac{\lambda\,\text{coſ.}\,p}{v^2} - \frac{\lambda(u - v\,\text{coſ.}\,p)}{w^3},$$
$$\frac{u\,dd\Phi + 2\,du\,d\Phi}{dt^2} = -\frac{\lambda\,\text{ſin.}\,p}{v^2} + \frac{\lambda\,v\,\text{ſin.}\,p}{w^3},$$

vbi quidem ſi actio Veneris plane abeſſet, binas has conſequeremur aequationes differentiales:

$$\frac{ddu - u\,d\Phi^2}{dt^2} = -\frac{1}{u^2}\ \text{et}\ \frac{u\,dd\Phi + 2\,du\,d\Phi}{dt^2} = 0;$$

quas

quas vti integrari oporteat ex ſcriptis Analyſtarum abunde liquet.

§. 6. Facili adhibita attentione nunc patet, variabiles u et Φ, ex duabus componi partibus, principali nimirum quae locum haberet ſi actio Veneris plane abeſſet, tumque illa, quae actioni Veneris debetur; hinc igitur in aequationibus modo allatis, loco ipſarum u et Φ, has quantitates $u + \lambda u'$ et $\Phi + \lambda \Phi'$ introducamus, et ſupponamus u et Φ iſtos eſſe valores, qui locum haberent, ſi actio Veneris exularet. Tumque habebimus

loco du, $du + \lambda du'$; loco ddu, $ddu + \lambda ddu'$;
loco $d\Phi$; $d\Phi + \lambda dd\Phi'$, loco $dd\Phi$, $dd\Phi + \lambda dd\Phi'$,

hincque

loco $u\,d\Phi^2$; $(u + \lambda u')(d\Phi^2 + 2\lambda\, d\Phi\, d\Phi') =$
$+ u\,d\Phi^2 + 2\lambda u\, d\Phi\, d\Phi' + \lambda u'\, d\Phi^2$;

loco $u\,dd\Phi$; $(u + \lambda u')(dd\Phi + \lambda\, dd\Phi') = u\,dd\Phi$
$+ \lambda u\, dd\Phi' + \lambda u'\, dd\Phi$;

loco $2\,du\,d\Phi$; $2(du + \lambda du')(d\Phi + \lambda d\Phi') = 2\,du\,d\Phi$
$+ 2\lambda\, du'\, d\Phi + 2\lambda\, du\, d\Phi'$.

et denique loco $\frac{1}{u^2}$; $\frac{1}{u^2}(1 - 2\frac{\lambda u'}{u})$.

Facta nunc ſubſtitutione et vſu adhibito aequationum

$$\frac{ddu - u\,d\Phi^2}{dt^2} = -\frac{1}{u^2} \text{ et } \frac{u\,dd\Phi + 2\,du\,d\Phi}{dt^2} = 0;$$

has conſequemur aequationes:

$$ddu' - 2u\,d\Phi\,d\Phi' - u'\,d\Phi^2 = + \frac{2u'\,dt^2}{u^3} - \frac{(u - v\,coſ.\,p)\,dt^2}{w^3} - \frac{coſ.\,p}{v^2}$$

$$u\,dd\Phi' + u'\,dd\Phi + 2\,du'\,d\Phi + 2\,du\,d\Phi' = -\frac{ſin.\,p\,dt^2}{v^2} + \frac{v\,ſin.\,p.\,dt^2}{w^3},$$

§. 7. Quia excentricitas tam telluris quam Veneris, eſt valde parua; ſepoſita conſideratione iſtius elementi, fiet $u = a = 1$ et $d\Phi = dt$ hincque $dd\Phi = 0$, ſicque noſtrae aequationes in iſtas abibunt:

$$ddu' - 2dt\,d\Phi' - u'dt^2 = +2u'dt^2 - \frac{(1 - v\,\text{coſ.}\,p)\,dt^2}{w^3} - \frac{\text{coſ.}\,p\,dt^2}{v^2}$$

$$dd\Phi' + 2du'\,dt = -\frac{\text{ſin.}\,p\,dt^2}{v^2} + \frac{v\,\text{ſin.}\,p\,dt^2}{w^3}.$$

Siue

$$ddu' - 2dt\,d\Phi' - 3u'dt^2 = -U\,dt^2 \text{ et}$$

$$dd\Phi' + 2du'\,dt = -V\,dt^2, \text{ poſitis nimirum}$$

$$U = +\frac{\text{coſ.}\,p}{v^2} + \frac{1 - v\,\text{coſ.}\,p}{w^3} \text{ et } V = \frac{\text{ſin.}\,p}{v^2} - \frac{v\,\text{ſin.}\,p}{w^3},$$

vbi haec denominatio V, cum iſta priori maſſam Veneris denotante, non eſt confundenda.

§. 8. Iam igitur ſtatim habemus poſteriorem aequationum propoſitarum integrabilem, quippe quum ſit:

$$d\Phi' + 2u'\,dt = -dt\int V\,dt,$$

ducta igitur hac aequatione in $2dt$, eaque ad illam

$$ddu' - 2dt\,d\Phi' - 3u'dt^2 = -U\,dt^2, \text{ addita, fiet}$$

$$ddu' + u'dt^2 = -2dt^2\int V\,dt - U\,dt^2;$$

haec aequatio vero fit integrabilis ope binorum multiplicatorum coſ. t et ſin. t. Et integralia habebuntur:

$$du'\,\text{coſ.}\,t + u'dt\,\text{ſin.}\,t = -dt\int U\,dt\,\text{coſ.}\,t - 2dt\int dt\,\text{coſ.}\,t\int V\,dt;$$

$$du'\,\text{ſin.}\,t - u'dt\,\text{coſ.}\,t = -dt\int U\,dt\,\text{ſin.}\,t - 2dt\int dt\,\text{ſin.}\,t\int V\,dt.$$

Quare ducta priori aequatione in ſin. t, poſteriori in coſ. t, earumque capta differentia, conſequemur denique hanc aequationem:

$$u' = -\text{ſin.}\,t\int U\,dt\,\text{coſ.}\,t + \text{coſ.}\,t\int U\,dt.\text{ſin}\,t + 2\,\text{coſ.}\,t\int dt\,\text{ſin.}\,t\int V\,dt$$
$$- 2\,\text{ſin.}\,t\int dt.\,\text{coſ.}\,t\int V\,dt.$$

Quum

Quum igitur nunc ſit:

$$\int dt \,\text{ſin.}\, t \int V\, dt = -\,\text{coſ.}\, t \int V\, dt + \int V\, dt \,\text{coſ.}\, t;$$
$$\int dt \,\text{coſ.}\, t \int V\, dt = \text{ſin.}\, t \int V\, dt - \int V\, dt \,\text{ſin.}\, t,$$

iſta expreſſio pro u', in hanc abibit:

$$u' = -2\int V\, dt + \text{coſ.}\, t \int dt\, (2\, V\, \text{coſ.}\, t + U\, \text{ſin.}\, t)$$
$$+ \text{ſin.}\, t \int dt\, (2\, V\, \text{ſin.}\, t - U\, \text{coſ.}\, t).$$

§. 9. Porro quum ſit

$$2\, d\, d u' - 4\, dt\, d\Phi' - 6\, u'\, dt^2 = -2\, U\, dt^2; \text{ et}$$
$$3\, dt\, d\Phi' + 6\, u'\, dt^2 = -3\, dt^2 \int V\, dt;$$

his aequationibus additis prodibit:

$$2\, d\, d u' - dt\, d\Phi' = -2\, U\, dt^2 - 3\, dt^2 \int V\, dt,$$

ideoque integrando:

$$2\, d u' - \Phi'\, dt = -2\, dt \int U\, dt - 3\, dt \int dt \int V\, dt,$$

ſiue

$$\Phi' = 3 \int dt \int V\, dt + 2 \int U\, dt + \frac{2\, d u'}{dt}.$$

Atqui ex aequationibus:

$$d u' \,\text{coſ.}\, t + u' dt \,\text{ſin.}\, t = -dt \int U dt \,\text{coſ.}\, t - 2 dt \int dt \,\text{coſ.}\, t \int V\, dt;$$
$$d u' \,\text{ſin.}\, t - u'\, dt \,\text{coſ.}\, t = -dt \int U\, dt \,\text{ſin.}\, t - 2 dt \int dt \,\text{ſin.}\, t \int V dt,$$

multiplicata priori per coſ. t et poſteriori per ſin. t, earumque capta ſumma, prodibit:

$$\frac{2\, d u'}{dt} = -2\,\text{coſ.}\, t \int U\, dt \,\text{coſ.}\, t - 4\,\text{coſ.}\, t \int dt \,\text{coſ.}\, t \int V\, dt;$$
$$-2\,\text{ſin.}\, t \int U\, dt \,\text{ſin.}\, t - 4\,\text{ſin.}\, t \int a t \,\text{ſin.}\, t \int V\, dt;$$

quae per ſimilem reductionem ac ſupra, reducitur ad hanc:

$$\frac{2\, d u'}{dt} = 2\,\text{coſ.}\, t \int dt\, (2\, V\, \text{ſin.}\, t - U\, \text{coſ.}\, t)$$
$$-2\,\text{ſin.}\, t \int dt\, (2\, V\, \text{coſ.}\, t + U\, \text{ſin.}\, t).$$

 Ideo-

Ideoque fiet

$$\Phi' = 3\int dt \int V\,dt + 2\int U\,dt + 2\,\text{coſ.}\,t\int dt\,(2V\,\text{ſin.}\,t - U\,\text{coſ.}\,t) - 2\,\text{ſin.}\,t\int dt\,(2V\,\text{coſ.}\,t + U\,\text{ſin.}\,t),$$

exiſtente

$$u' = -2\int V\,dt + \text{coſ.}\,t\int dt\,(2V\,\text{coſ.}\,t + U\,\text{ſin.}\,t) + \text{ſin.}\,t\int dt\,(2V\,\text{ſin.}\,t - U\,\text{coſ.}\,t),$$

vbi quidem hi valores prorſus iidem prodierunt, quos Illuſtris *Eulerus* §. 21. ſuae diſſertationis, pro quantitatibus Y', X' inuenerat. Iam autem ſponte liquet $\lambda\Phi'$ deſignare perturbationem in anomalia telluris vera, et $\lambda u'$ in diſtantia Solis a Tellure ab actione Veneris oriundam, quatenus nimirum excentricitatis Telluris nulla habetur ratio.

§. 10. Si nunc inſuper conſiderationem excentritatis orbitae telluris in computum inducere vellemus, id quidem ita fieri poſſet, vt in aequationibus artic 6 inuentis, ponamus $u' = a(1 + e\,\text{coſ.}\,n)$; $\Phi = t - 2e\,\text{coſ.}\,n$; deſignante e excentricitatem orbitae telluris et n anomaliam mediam. Tum enim ſi loco u' introducamus $u' + e u'$ et loco $\Phi' = \Phi' + e\Phi''$, hincque ſtatuamus vti in artic. 7. factum eſt:

$$d\,d\,u' - 2\,dt\,d\Phi' - 3\,u'\,dt^2 = -U\,dt^2 \text{ et}$$
$$d\,d\Phi' + 2\,du'\,dt = -V\,dt^2;$$

facili adhibita attentione patet aequationes differentiales pro u'' et Φ'', huiusmodi formam eſſe conſecuturas:

$$d\,d\,u'' - 2\,dt\,d\Phi'' - 3\,u''\,dt^2 = -U'\,dt^2;$$
$$d\,d\Phi'' + 2\,du''\,dt = -V'\,dt^2;$$

quae igitur eodem modo integrantur, ac aequationes ſupra allatae. Euolutionem autem quantitatum U', V' heic

ſuſci-

ſuſcipere nihil attinet, quum pro praeſenti negotio, perturbationes hinc oriundae, certe nullius forent momenti.

§. 11. Quoniam

$$U = \frac{\text{coſ.}\, p}{v^2} + \frac{1 - v\,\text{coſ.}\, p}{w^3} \text{ et } V = \frac{\text{ſin.}\, p}{v^2} - \frac{v\,\text{ſin.}\, p}{w^3},$$

vbi priora membra ab actione Veneris in Solem ad tellurem translata oriuntur, poſteriora vero ab actione Veneris in terram gignuntur. Igitur ſi haec membra cum Illuſtri *Eulero* ſeparatim tractemus, habebimus pro prioribus, ſi excentricitatem Veneris non conſideremus, $v = b$ diſtantiae mediae Veneris a Sole. Tumque ſi ſtatuamus $\frac{dp}{dt} = m$, cuius quantitatis valor ex ratione motuum mediorum Veneris et terrae innoteſcit, fiet

$$2V\,\text{coſ.}\, t + U\,\text{ſin.}\, t = \frac{1}{b^2}\left(\tfrac{1}{2}\,\text{ſin.}\,(p-t) + \tfrac{3}{2}\,\text{ſin.}\,(p+t)\right),$$

$$2V\,\text{ſin.}\, t - U\,\text{coſ.}\, t = \frac{1}{b^2}\left(\tfrac{1}{2}\,\text{coſ.}\,(p-t) - \tfrac{3}{2}\,\text{coſ.}\,(p+t)\right).$$

Hinc colligitur

$$\int dt\,(2V\,\text{coſ.}\, t + U\,\text{ſin.}\, t) = -\frac{1}{b^2}\left(\frac{\text{coſ.}\,(p-t)}{2(m-1)} + \frac{3\,\text{coſ.}\,(p+t)}{2(m+1)}\right);$$

$$\int dt\,(2V\,\text{ſin.}\, t - U\,\text{coſ.}\, t) = \frac{1}{b^2}\left(\frac{\text{ſin.}\,(p-t)}{2(m-1)} - \frac{3\,\text{ſin.}\,(p+t)}{2(m+1)}\right);$$

$$\text{coſ.}\, t \int dt\,(2V\,\text{coſ.}\, t + U\,\text{ſin.}\, t) + \text{ſin.}\, t \int dt\,(2V\,\text{ſin.}\, t - U\,\text{coſ.}\, t)$$

$$= -\frac{1}{b^2}\left(\frac{\text{coſ.}\, p}{2(m-1)} + \frac{3\,\text{coſ.}\, p}{2(m+1)}\right) = -\frac{1}{b^2}.\frac{(2m-1)}{m^2-1}\,\text{coſ.}\, p;$$

$$\text{coſ.}\, t \int dt\,(2V\,\text{ſin.}\, t - U\,\text{coſ.}\, t) - \text{ſin.}\, t \int dt\,(2V\,\text{coſ.}\, t + U\,\text{coſ.}\, t)$$

$$= \frac{1}{b^2}\left(\frac{\text{ſin.}\, p}{2(m-1)} - \frac{3\,\text{ſin.}\, p}{2(m+1)}\right) = \frac{1}{b^2}.\frac{(2-m)\,\text{ſin.}\, p}{m^2-1}.$$

Et quum ſit

$$\int V\,dt = -\frac{1}{b^2}.\frac{\text{coſ.}\, p}{m};\quad \int dt \int V\,dt = -\frac{1}{b^2}.\frac{\text{ſin.}\, p}{m^2};$$

$$\int U\,dt = +\frac{1}{b^2}\frac{\text{ſin.}\, p}{m};$$

conſequemur denique:

$$u' = \frac{1}{b^2}.\frac{m-2}{m(m^2-1)}\,\text{coſ.}\, p \text{ et } \Phi' = \frac{1}{b^2}\left(\frac{m^2-2m+3}{m^2(m^2-1)}\right)\text{ſin.}\,\Phi.$$

Dein-

Deinceps autem ſi excentricitas Veneris exprimatur littera $\varkappa$ et anomalia Veneris media angulo q, ſitque $dq = r\,dt$, erit $v = b\,(1 + \varkappa \text{ coſ. } q)$ et $\psi = \zeta - 2\varkappa \text{ ſin. } q$, exiſtente ζ Longitudine media Veneris. Tumque ſi integralia euoluantur pro u' et Φ' hos conſequemur terminos:

$$u' = \frac{\varkappa}{b\,b}\left(\frac{-2\,(m + r - 2)}{(m + r)\,((m + r)^2 - 1)}\right) \text{coſ.}\,(p + q)$$

$$\Phi' = \frac{2\,\varkappa}{b\,b}\left(\frac{(m + a)^2 - 2\,(m + r) + 3}{(m + r)^2\,((m + r)^2 - 1)}\right) \text{ſin.}\,(p + q),$$

qui termini a prioribus deriuantur, ſi in iſtis loco m vbique ſcribatur $m + r$, et loco coſ. p, ſin. p; adhibeantur coſ. $(p + q)$, ſin. $(p + q)$, tumque prior per $-2\varkappa$ multiplicetur, poſterior per $+2\varkappa$. In terminis autem abſolutis habebimus, ſi m ſtatuatur $= 0{,}62552$, $b = 0{,}72333$,

$$u' = \frac{1}{b^2} \cdot \frac{m - 2}{m\,(m^2 - 1)} \text{coſ.}\,p = +6{,}8992 \text{ coſ.}\,p$$

$$\Phi' = \frac{1}{b^2}\,\frac{(m^2 - m + 3)}{m^2\,(m^2 - 1)} \text{ſin.}\,\Phi = -17{,}1743 \text{ ſin.}\,p,$$

quae quum vix differant ab illis, quos in Diſſertatione citata Illuſtris *Euleri* inueneram, calculis tum allatis pro hac parte perturbationis adquieſcere poterimus.

§. 12. Pro altera parte perturbationis a Venere productae, habemus ſepoſita conſideratione excentricitatis tam pro terra, quam Venere;

$$U = \frac{1 - b \text{ coſ. } p}{w^3} \text{ et } V = \frac{-b \text{ ſin. } p}{w^3},$$

exiſtente $w = \sqrt{(1 - 2\,b \text{ coſ. } p + b^2)}$. Quum igitur heic integrationes actu ſuſcipi nequeant, niſi factor $\frac{1}{w^3}$, huiusmodi ſerie

$$A + B \text{ coſ. } p + C \text{ coſ. } 2\,p + D \text{ coſ. } 3\,p + \text{etc.}$$

exprimatur, quod quomodo praeſtari queat, licet tum ab Illuſtri de *Clairaut*, cum ipſo Illuſtri *Eulero* oſtenſum eſt; heic

heic tamen alia via concluſiones per integrationem inueniendas, elicere ſtatuit Illuſtr. *Eulerus*. Nimirum inuentis primum valoribus ipſorum U; V; 2 V coſ. t + U ſin. t; 2 V ſin. t − U coſ. t, qui datis poſitionibus pro angulo p vel t reſpondent; ſi in axi L U ſumantur abſciſſae L A, L C, L E etc. his poſitionibus pro t congruentes, tumque erigantur A B, C D, E F etc. valoribus ipſorum U, vel V etc. proportionales, tumque per extremitates B, D, F, H etc. intelligatur ducta linea curua, area huius curuae exhibebit valorem integralis $\int X\,dt$, vel $\int V\,dt$ etc. Nunc ſi binae conſiderentur coordinatae H G, K I ſibi inuicem valde propinquae, elementum areae aequale ſtatui poteſt trapezio rectilineo T. XVIII. Fig. 6.

$$HGIK = \tfrac{1}{2}\,GI\,(HG + KI).$$

Collectisque ſummis horum trapeziorum area curuae inueſtigari poterit, quae eo habebitur exactior, quo minus fuerit interuallum G I. In calculis, quos pro Diſſertatione Illuſtr. *Euleri* inſtitui, hoc interuallum aſſumtum eſt $t = 7°.\ 59'.\ 37''$ et $p = 5°$; nunc vero eadem procedendi ratione integralia iſta pro ſingulis gradibus ipſius p exquirere operae pretium duxi.

§. 13. Quum ſit

$$w = \sqrt{(1 - 2b\,\text{coſ.}\,p + b^2)} = \sqrt{((1 - b\,\text{coſ.}\,p)^2 + b^2\,\text{ſin.}\,p^2)},$$

calculus ita faciliime expedietur, vt quaeratur

$$\text{Tang.}\,A = \frac{b\,\text{ſin.}\,p}{1 - b\,\text{coſ.}\,p}, \text{ ex quo fiet}$$

$$w = \frac{b\,\text{ſin.}\,p}{\text{ſin.}\,A} = \frac{1 - b\,\text{coſ.}\,p}{\text{coſ.}\,A},$$

deinde inueſtigato angulo B, ope formulae:

$$\text{Tang.}\,B = -\frac{2V}{U} = 2\,\text{Tang.}\,A, \text{ conſequemur}$$

$$2\,V\,\text{coſ.}\,t + U\,\text{ſin.}\,t = -U\,\text{Tang.}\,B\,\text{coſ.}\,t + U\,\text{ſin.}\,t = -\frac{U\,\text{ſin.}\,(B - t)}{\text{coſ.}\,B},$$

$$2\,V\,\text{ſin.}\,t - U\,\text{coſ.}\,t = -U\,\text{Tang.}\,B\,\text{ſin.}\,t - U\,\text{coſ.}\,t = -\frac{U\,\text{coſ.}\,(B - t)}{\text{coſ.}\,B}.$$

Nunc igitur oppido liquet, principalem rationem erroris in calculis a me commiſſi in eo reſidere, quod angulum B ſuppoſuerim ope huiusmodi formulae determinatum: Tang. B = 2 Tang. A, quod conſiſtere nequit cum aequationibus:

$$2\,V\,\text{coſ.}\,t + U\,\text{ſin.}\,t = U\,\text{ſin.}\,(B + t)\,\text{ſec.}\,B,$$

$$2\,V\,\text{ſin.}\,t - U\,\text{coſ.}\,t = U\,\text{coſ.}\,(B + t)\,\text{ſec.}\,B.$$

Hincque factum eſt vt iſtae quantitates, quae in Diſſertatione Illuſtris. *Euleri* per Partes I et II deſignantur, vti et integralia inde deriuanda, cum veritate non conſiſtant; ſimilique ratione, inde in eo quoque erratum eſt, quod integrale $\int dt \int V\,dt$ pro poſitiuo habitum ſit, vbi eſſe debuerit negatiuum.

§. 14. Quum ſit

$$\int V\,dt = \frac{1}{m}\int \frac{-b\,dp\,\text{ſin.}\,p}{(1 - 2\,b\,\text{coſ.}\,p + b^2)^{\frac{3}{2}}},$$

liquet omnino hanc quantitatem eſſe integrabilem, ipſo integrali exiſtente

$$= \frac{1}{m\,(1 - b)} + \frac{1}{m\,\sqrt{(1 - 2\,b\,\text{coſ.}\,p + b^2)}}.$$

Hincque fiet

$$3\int dt \int V\,dt = \frac{-3\,t}{m^2\,(1 - b)} + \frac{5}{m^2}.\int \frac{dp}{\sqrt{(1 - 2\,b\,\text{coſ.}\,p + b^2)}},$$

ex quo nunc patet duplum iſtud integrale $\int dt \int V\,dt$, ad ſimplex

ſimplex integrale $\int \frac{d p}{\sqrt{(1 - 2 b \, cos. \, p + b^2)}}$ reduci poſſe, quo ipſo calculus non mediocriter ſubleuatur. Verum hoc non obſtante vtraque haec integralia $\int V \, d t$, $\int d t \int V \, d t$, inueſtigare e re duxi, vt iſtos valores comparando cum illis, quibus aequipollere iam vidimus, eo certius eſſet iudicium de exactitudine noſtrorum calculorum. Sequitur nunc Tabula exhibens valores pro

Log. w, Log. U, Log. V, Log. P. I Log. P. II,

quos heic repetere eo magis conſultum duxi, quod bini iſti vltimi Logarithmi, in Diſſertatione Illuſtris *Euleri* plane errorei, exhibiti ſint.

p	t	L $\frac{1}{w}$	Log. U	Log. V	Log. P. I.	Log. P. II.
0	0	0,55804	+1,11608	− ∞	− ∞	−1,11608
5	7°. 59′. 37″	0,54296	+1,07533	−0,42886	−0,56381	−1,09781
10	15. 59	0,50323	+0,96875	−0,60902	−0,72023	−1,04859
15	23. 59	0,45004	+0,82937	−0,62282	−0,69223	−0,98133
20	31. 58	0,39285	+0,68414	−0,57211	−0,57684	−0,90587
25	39. 58	0,33674	+0,54734	−0,49563	−0,40392	−0,82773
30	47. 58	0,28403	+0,42440	−0,41044	−0,16758	−0,74819
35	55. 57	0,23543	+0,31626	−0,32418	−9,81023	−0,66795
40	63. 57	0,19097	+0,22209	−0,24036	−8,46500	−0,58629
45	71. 56	0,15040	+0,14006	−0,16007	+9,61848	−0,50199
50	79. 56	0,11336	+0,06839	−0,08366	+9,86252	−0,41368
55	87. 56	0,07949	+0,00563	−0,01116	+9,97224	−0,31959
60	95. 55	0,04849	+9,95048	−9,94237	+0,02865	−0,21752
65	103. 55	0,02004	+9,90167	−9,87679	+0,05545	−0,10381
70	111. 55	9,99391	+9,85829	−9,81410	+0,06296	−9,97314
75	119. 54	9,96989	+9,81957	−9,75393	+0,05614	−9,81612
80	127. 54	9,94775	+9,78492	−9,69596	+0,03779	−9,61207

p	t	$L \frac{1}{w}$	Log. U	Log. V	Log. P. I.	Log. P. II.
85	135°. 53′	9,92739	+9,75384	−9,63984	+0,00923	−9,30124
90	143. 53	9,90862	+9,72584	−9,58522	+9,97089	−8,37919
95	151. 53	9,89135	+9,70057	−9,53175	+9,92252	+9,08653
100	159. 52	9,87547	+9,67775	−9,47909	+9,86323	+9,37928
105	167. 52	9,86090	+9,65719	−9,42698	+9,79104	+9,52066
110	175. 52	9,84754	+9,63857	−9,37492	+9,70273	+9,60178
115	183. 51	9,83534	+9,62184	−9,32264	+9,59254	+9,64930
120	191. 51	9,82425	+9,60676	−9,26959	+9,44884	+9,67409
125	199. 50	9,81419	+9,59325	−9,21526	+9,24515	+9,68134
130	207. 50	9,80515	+9,58122	−9,15901	+8,88717	+9,67376
135	215. 50	9,79704	+9,57053	−9,09998	−8,13727	+9,65222
140	223. 49	9,78990	+9,56116	−9,03712	−8,97696	+9,61649
145	231. 49	9,78366	+9,55303	−8,96890	−9,21957	+9,56490
150	239. 49	9,77828	+9,54605	−8,89315	−9,35272	+9,49412
155	247. 48	9,77377	+9,54023	−8,80659	−9,43585	+9,39740
160	255. 48	9,77012	+9,53552	−8,70370	−9,48839	+9,26056
165	263. 47	9,76726	+9,53188	−8,57412	−9,51875	+9,04704
170	271. 47	9,76524	+9,52929	−8,39473	−9,53106	+8,59219
175	279. 47	9,76403	+9,52774	−8,09172	−9,52683	−8,51828
180	287. 46	9,76363	+9,52723	+ ∞	−9,50600	−9,01173
185	295. 46	. .	. . .	. . .	−9,46665	−9,22721
190	303. 45	. .	. . .	. . .	−9,40429	−9,36026
195	311. 45	. .	. . .	. . .	−9, 3197	−9, 4455
200	319. 44	. .	. . .	. . .	−9, 1602	−9, 5147
205	327. 44	. .	. . .	. . .	−8, 8875	−9, 5582
210	335. 44	. .	. . .	. . .	−7, 3499	−9, 5852

Heic

Heic autem Log. Part. I et II. vſque ad 210° adferre placuit, quia ſi integralia harum partium in dt, vſque ad hunc gradum quoque continuentur, inde iudicium depromi poteſt de exactitudine calculorum pro angulis 180° minoribus, vti ex infra dicendis patebit.

§. 15. In Tabula pro integralibus

$\int U\,dt$; $\int V\,dt$; $\int dt \int V\,dt$; $\int$ P. I. dt etc.

ita procedendum exiſtimauimus, vt horum integralium valores pro ſingulis alternis angulis exponeremus, ipſa ratione incrementorum omiſſa, cum ex ordine quo integralia procedunt de eorum exactitudine facile ſit iudicium:

p	$\int U\,dt$	$\int V\,dt$	$\int dt\int V\,dt$	$\int P.I.\,dt$	$\int P.II.\,dt$	$\frac{1}{m}\int\frac{dt}{w}$
0	0	−0,	−0,	−0,	−0,	+0
2	+0,7244	−0,0329	−0,0007	−0,0456	− 0,7268	+0,3218
4	+1,4272	−0,1283	−0,0050	−0,1772	− 1,4435	+0,6399
6	+2,0897	−0,2772	−0,0161	−0,3802	− 2,1412	+0,9512
8	+2,6993	−0,4671	−0,0367	−0,6345	− 2,8130	+1,2530
10	+3,2490	−0,6845	−0,0687	−0,9191	− 3,4535	+1,5434
12	+3,7375	−0,9164	−0,1132	−1,2143	− 4,0596	+1,8212
14	+4,1679	−1,1531	−0,1709	−1.5051	− 4,6302	+2,0859
16	+4,5449	−1,3868	−0,2418	−1,7799	− 5,1630	+2,3374
18	+4,8745	−1,6125	−0,3255	−2,0312	− 5,6623	+2,5761
20	+5,1628	−1,8271	−0,4215	−2,2558	− 6,1277	+2,8025
22	+5,4156	−2,0288	−0,5291	−2,4518	− 6,5614	+3,0173
24	+5,6382	−2,2171	−0,6476	−2,6202	− 6,9647	+3,2283
26	+5,8351	−2,3919	−0,7762	−2,7617	− 7,3400	+3,4151
28	+6,0103	−2,5534	−0,9142	−2.8780	− 7,6883	+3,5996
30	+6,1670	−2,7028	−1,0609	−2,9711	− 8,0123	+3,7753
32	+6,3078	−2,8409	−1,2156	−3,0433	− 8,3138	+3,9430
34	+6,4350	−2,9684	−1,3777	−3,0963	− 8,5937	+4,1032
36	+6,5506	−3,0863	−1,5467	−3,1323	− 8,8535	+4,2566
38	+6,6564	−3,1953	−1,7220	−3,1532	− 9,0948	+4,4037
40	+6,7534	−3,2962	−1,9032	−3,1609	− 9,3186	+4,5449
42	+6,8429	−3.3897	−2,0897	−3,1570	− 9,5259	+4,6812
44	+6,9262	−3,4765	−2,2813	−3,1428	− 9,7167	+4,8120
46	+7,0034	−3,5572	−2,4776	−3,1197	− 9,8930	+4,9381
48	+7,0755	−3,6325	−2,6782	−3,0889	−10,0568	+5,0599
50	+7,1428	−3,7027	−2,8828	−3,0513	−10,2095	+5,1777
52	+7,2062	−3,7682	−3,0913	−3,0081	−10,3480	+5.2916
54	+7,2660	−3,8295	−3,3033	−2,9599	−10,4774	+5,4020
56	+7,3226	−3,8867	−3,5186	−2,9076	−10,5940	+5 5092
58	+7,3762	−3,9403	−3,7370	−2,8519	−10,7004	+5,6133

p

p	$\int U\,dt$	$\int V\,dt$	$\int P.I.\,dt$	$\int P.II.\,dt$	$\int dt \int V\,dt$	$\frac{1}{m}\int\frac{dt}{w}$
60	+7,4270	−3,9907	−2,7934	−10,7971	− 3,9583	+5,7144
62	+7,4755	−4,0380	−2,7329	−10,8849	− 4,1823	+5,8128
64	+7,5220	−4,0825	−2,6707	−10,9640	− 4,4089	+5,9086
66	+7,5667	−4,1245	−2,6073	−11,0350	− 4,6379	+6,0020
68	+7,6093	−4,1641	−2,5432	−11,0984	− 4,8692	+6,0932
70	+7,6501	−4,2016	−2,4788	−11,1545	− 5,1026	+6,1822
72	+7,6897	−4,2369	−2,4143	−11,2037	− 5,3381	+6,2691
74	+7,7278	−4,2704	−2,3502	−11,2465	− 5,5755	+6,3542
76	+7,7646	−4,3020	−2,2869	−11,2830	− 5,8147	+6,4374
78	+7,8002	−4,3320	−2,2242	−11,3138	− 6,0556	+6,5189
80	+7,8347	−4,3604	−2,1625	−11,3391	− 6,2982	+6,5987
82	+7,8682	−4,3873	−2,1022	−11,3595	− 6,5423	+6,6770
84	+7,9006	−4,4129	−2,0437	−11,3751	− 6,7878	+6,7538
86	+7,9322	−4,4372	−1,9871	−11,3863	− 7,0347	+6,8293
88	+7,9630	−4,4603	−1,9319	−11,3935	− 7,2830	+6,9034
90	+7,9930	−4,4823	−1,8787	−11,3967	− 7,5325	+6,9763
92	+8,0222	−4,5032	−1,8276	−11,3963	− 7,7832	+7,0480
94	+8,0507	−4,5232	−1,7788	−11,3927	− 8,0351	+7,1185
96	+8,0787	−4,5421	−1,7323	−11,3859	− 8,2880	+7,1880
98	+8,1059	−4,5601	−1,6879	−11,3763	− 8,5420	+7,2564
100	+8,1323	−4,5773	−1,6459	−11,3643	− 8,7969	+7,3238
102	+8,1586	−4,5937	−1,6063	−11,3499	− 9,0528	+7,3903
104	+8,1843	−4,6093	−1,5694	−11,3334	− 9,3096	+7,4559
106	+8,2098	−4,6241	−1,5350	−11,3150	− 9,5672	+7,5207
108	+8,2347	−4,6382	−1,5030	−11,2950	− 9,8256	+7,5847
110	+8,2592	−4,6518	−1,4737	−11,2734	−10,0848	+7,6479
112	+8,2833	−4,6647	−1,4469	−11,2505	−10,3448	+7,7103
114	+8,3070	−4,6771	−1,4225	−11,2265	−10,6054	+7,7720
116	+8,3303	−4,6888	−1,4006	−11,2017	−10,8667	+7,8330
118	+8,3534	−4,7000	−1,3814	−11,1761	−11,2599	+7,8934

p

p	$\int U\,dt$	$\int V\,dt$	$\int P.I.\,dt$	$\int P.II.\,dt$	$\int dt\int V\,dt$	$\frac{1}{m}\int\frac{dt}{w}$
120	+8,3762	−4,7107	−1,3648	−11,1500	−11,3913	+7,9532
122	+8,3987	−4,7208	−1,3504	−11,1235	−11,6544	+8,0124
124	+8,4208	−4,7305	−1,3384	−11,0967	−11,9181	+8,0711
126	+8,4427	−4,7397	−1,3285	−11,0699	−12,1824	+8,1292
128	+8,4643	−4,7484	−1,3208	−11,0432	−12,4471	+8,1869
130	+8,4856	−4,7567	−1,3152	−11,0167	−12,7123	+8,2441
132	+8,5068	−4,7646	−1,3119	−10,9906	−12,9780	+8,3008
134	+8,5277	−4,7721	−1,3106	−10,9650	−13,2441	+8,3571
136	+8,5485	−4,7792	−1,3115	−10,9399	−13,5106	+8,4130
138	+8,5690	−4,7859	−1,3141	−10,9155	−13,7775	+8,4685
140	+8,5894	−4,7922	−1,3184	−10,8919	−14,0448	+8,5236
142	+8,6095	−4,7981	−1,3244	−10,8694	−14,3124	+8,5785
144	+8,6295	−4,8036	−1,3320	−10,8478	−14,5803	+8,6330
146	+8,6494	−4,8088	−1,3412	−10,8273	−14,8485	+8,6872
148	+8,6691	−4,8137	−1,3519	−10,8080	−15,1170	+8,7411
150	+8,6887	−4,8182	−1,3638	−10,7899	−15,3857	+8,7948
152	+8,7083	−4,8225	−1,3769	−10,7731	−15,6547	+8,8482
154	+8,7279	−4,8264	−1,3912	−10,7578	−15,9240	+8,9014
156	+8,7472	−4,8300	−1,4064	−10,7438	−16,3282	+8,9544
158	+8,7664	−4,8333	−1,4224	−10,7314	−16,4630	+9,0072
160	+8,7856	−4,8362	−1,4392	−10,7206	−16,7328	+9,0598
162	+8,8048	−4,8389	−1,4565	−10,7111	−17,0027	+9,1123
164	+8,8238	−4,8413	−1,4744	−10,7031	−17,2728	+9,1647
166	+8,8428	−4,8434	−1,4927	−10,6967	−17,5430	+9,2169
168	+8,8617	−4,8453	−1,5115	−10,6919	−17,8134	+9,2691
170	+8,8805	−4,8469	−1,5303	−10,6888	−18,0838	+9,3211
172	+8,8993	−4,8482	−1,5491	−10,6876	−18,3543	+9,3731
174	+8,9181	−4,8491	−1,5679	−10,6878	−18,6249	+9,4249
176	+8,9369	−4,8498	−1,5865	−10,6898	−18,8955	+9,4767
178	+8,9557	−4,8502	−1,6049	−10,6931	−19,1663	+9,5285
180	+8,9745	−4,8505	−1,6230	−10,6979	−19,4371	+9,5803

§. 17.

§. 17. Antequam vlterius procedamus, nonnullis exemplis exactitudinem noſtrorum calculorum illuſtrare placebit. Quum igitur ſit

$$2\int V\,dt = -\frac{2}{m(1-b)} + \frac{2}{m\sqrt{(1-2b\,\text{coſ.}\,p+b^2)}},$$

habebimus primo generatim $\frac{-2}{m(1-b)} = -11,5577$; nunc ſi ponatur $p = 70°$, fiet

$$\frac{2}{m\sqrt{(1-2b\,\text{coſ.}\,p+b^2)}} = 3,1530,$$

eritque ideo pro iſto caſu

$$2\int V\,dt = -11,5577 + 3,1530 = -8,4041,$$

quod in noſtra Tabula inuenimus $= -8,4032$. Deinde ſi ſtatuatur $p = 100°$, fiet

$$\frac{2}{m\sqrt{(1-2b\,\text{coſ.}\,p+b^2)}} = +2,4004,$$

ideoque $2\int V\,dt = -9,1567$, quod ex Tabula noſtra invenitur $-9,1546$. Vlterius quia

$$\int dt\int V\,dt = \frac{-t}{m(1-b)} + \frac{1}{m^2}\int\frac{dp}{\sqrt{(1-2b\,\text{coſ.}\,p+b^2)}}$$
$$= \frac{-t}{m(1-b)} + \frac{1}{m}\int\frac{dt}{w}.$$

Si ponamus $p = 50$, conſequemur $\frac{-t}{m(1-b)} = -8,0160$, atqui eſt $\frac{1}{m}\int\frac{dt}{w} = +5,1777$, quorum differentia $-2,8833$ exhibet $\int dt\int V\,dt$, quod integrale in noſtra Tabula ſtatuitur $-2,8828$. Pro $p = 110°$, fit

$$\frac{-t}{m(1-b)} = -17,7342 \text{ et } \frac{1}{m}\int\frac{dt}{w} = +7,6479,$$

hinc $dt\int V\,dt = -10,0863$, quod in noſtra Tabula ſtatuitur $= -10,0848$. Quomodo vero integralium:

$$\int dt\,(2\,V\,\text{coſ.}\,t + U\,\text{ſin.}\,t);\ \int dt\,(2\,V\,\text{ſin.}\,t - U\,\text{coſ.}\,t)$$

examen inſtitui queat, infra explicabimus.

§. 18. Poſtquam igitur integralia

$$\int U\,dt;\ \int V\,dt;\ \int dt\int V\,dt;\ \int dt\,(2\,V\,\text{coſ.}\,t + U\,\text{ſin.}\,t);$$
$$\int dt\,(2\,V\,\text{ſin.}\,t - U\,\text{coſ.}\,t);$$

inuenta ſunt, pro inueniendis u' et Φ' tantum reſtat, vt bina vltima integralia in coſ. t, ſin. t multiplicentur; tum enim erit, vt ſupra vidimus:

$$u' = -2\int V\,dt + \text{coſ.}\,t\int dt\,(2\,V\,\text{coſ.}\,t + U\,\text{ſin.}\,t)$$
$$+ \text{ſin.}\,t\int dt\,(2\,V\,\text{ſin.}\,t - U\,\text{coſ.}\,t).$$
$$\Phi' = 3\int dt\int V\,dt + 2\int U\,dt + 2\,\text{coſ.}\,t\int dt\,(2\,V\,\text{ſin.}\,t - U\,\text{coſ.}\,t$$
$$- 2\,\text{ſin.}\,t\int dt\,(2\,V\,\text{coſ.}\,t + U\,\text{ſin.}\,t).$$

Verum tum quoque perpendendum eſt, haec integralia quantitates quasdam conſtantes inuoluere, quae ad quantitates u', Φ' exprimendas non pertinent. Sic igitur quum ex indole quaeſtionis intelligatur, Φ' non exprimi debere, niſi per terminos in ſin. p, ſin. $2\,p$, ſin. $3\,p$ etc. multiplicatos; nunc autem facile liqueat ob

$$3\int dt\int V\,dt = \frac{-3\,t}{m^2\,(1-b)} + \frac{3}{m^2}\int\frac{dp}{\sqrt{(1 - 2\,b\,\text{coſ.}\,p + b^2)}} \text{ et}$$
$$2\int U\,dt = 2\int\frac{(1 - b\,\text{coſ.}\,p)\,dp}{m\,(1 - 2\,b\,\text{coſ.}\,p + b^2)^{\frac{3}{2}}},$$

haec integralia quantitates inuoluere, quae multiplae ſunt ipſius anguli p; tumque ſimul patet ex integrali

$$-2\,\text{ſin.}\,t\int dt\,(2\,V\,\text{coſ.}\,t + U\,\text{ſin.}\,t),$$

terminum huius formae N ſin. t produci; inde omnino concludendum eſt, has quantitates ex valore ipſius Φ' eſſe eliminandas. Id autem facile praeſtabitur, ponendo valorem ipſius Φ', pro angulo $p = 180°$ ex calculis inuentum, $= 0$, ita tamen vt iſta pars, quae ex integralibus

$$2\int U\,dt + 3\int dt\int V\,dt$$

pro-

prouenit, deſtrui concipiatur per quantitatem huius formae M p, reliqua vero ex integralibus

$$-2\,\text{ſin.}\,t\int dt\,(2\text{V}\,\text{coſ.}\,t+\text{U}\,\text{ſin.}\,t)+2\,\text{coſ.}\,t\int dt\,(2\text{V}\,\text{ſin.}\,t-\text{U}\,\text{coſ.}\,t)$$

orta, deſtruatur per terminum iſtius formae N ſin. t. Hinc quum inuenerimus pro $p = 180°$,

$$\Phi' = -40,3623 - 9,6206;$$

facile liquet hanc quantitatem deſtrui per expreſſionem:

$$+40,3623.\tfrac{p}{180} - 10,1026\ \text{ſin.}\,t,$$

haec igitur quantitas continuo ad numeros ex calculis noſtris deductos eſt addenda, vt veri eliciantur valores anguli Φ', pro ſingulis valoribus ipſius p.

§. 19. Si modum quo integralia $\int \text{U}dt$; $\int dt\int \text{V}dt$ in noſtra Tabula producuntur, conſideremus; facile patebit, ſi calculum vltra 180° proſequi vellemus, eadem incrementa poſt 180° occurrere, ac ante hunc angulum, ita vt pro angulo $180° + e$, valores integralium $\int \text{V}dt$; $\int dt\int \text{V}dt$; tantundem ſuperent valores qui pro $p = 180°$ locum habent, ac valores pro angulo $180° - e$, a valoribus pro $p = 180°$ deficiunt; vnde omnino patet haec integralia terminum angulo p proportionalem inuoluere. De integralibus autem quae per $\int$P. I. dt et $\int$P. II. dt expreſſimus, conſtat incrementorum rationem ante et poſt 180°, non eſſe eandem, quapropter facile praeſumi poteſt haec integralia ad parem conditionem reduci non poſſe, niſi vtrique addatur terminus per ſin. t multiplicatus. Quum igitur pro $p = 210°$, ſit

$$\int \text{P. I.}\,dt = -1,7820° \text{ et } \int \text{P. II.}\,dt = -10,9231,$$

 prior

prior in ſin. t, poſterior in coſ. t ducta, producent has quantitates $-0,7325$; $-9,9578$, quarum ſumma per binarium multiplicata eſt $-21,3806$, terminus autem $-10,1026$ ſin. t dabit $+4,1525$, vnde ex his binis integralibus conſequimur terminum $-17,2285$. Atqui pro $p = 150°$, dat

$$-\text{ſin.}\, t \int \text{P.I.}\, dt. = -1,1789;\ \text{coſ.}\, t \int \text{P.II.}\, dt. = 5,4261,$$

differentiae duplum eſt $8,4948$; atqui terminus ex $-10,1026$ ſin. t reſultans inuenitur $+8,7322$, ideoque hinc deducitur quantitas $+17,2270$, quae negatiue ſumta ab illa pro angulo $p = 210°$, vix differt. Vlterius quum pro $p = 200°$, ſit

$$\int \text{P.I.}\, dt = -1,7611 \text{ et } \int \text{P.II.}\, dt = -10,8226,$$

habebimus

$$-\text{ſin.}\, t \int \text{P.I.}\, dt = -1,1380 \text{ et } \text{coſ.}\, t \int \text{P.II.}\, dt = -8,2597,$$

ideoque horum ſumme duplum $= -18,7954$, atqui $-10,1026$. ſin. t dat $+6,5282$; differentia igitur eſt $-12,2672$. Pro $p = 160°$, inuenimus

$$-\text{ſin.}\, t \int \text{P.I.}\, dt + \text{coſ.}\, t \int \text{P.II.}\, dt = +1,2358,$$

eius duplum eſt $+2,4716$ et $-10,1026$ ſin. t praebet $+9,7945$, ſumma igitur habetur $+12,2661$, quae negatiue capta a termino pro $p = 200°$ inuento, vix tantillum differt. His igitur experimentis nunc comprobatum eſt, calculos noſtros ſatis bene ſe habere, tumque ſimul euictum, valorem pro Φ' inuentum ope huiusmodi termini $+40,3623 . \frac{p}{185} - 10,1026$. ſin. t corrigi debere.

§. 20. Quum in integrali valorem ipſius Φ' exprimente, terminus N ſin. t ex integrali

$$-2\ \text{ſin.}\, t \int dt\, (2\, \text{V coſ.}\, t + \text{U ſin.}\, t)$$

origi-

originem repetere ſit exiſtimandus, merito quaeritur cur in valore ipſius Φ' pro angulo $p = 180°$, bina iſta integralia:

$$-2\,\text{ſin.}\,t \int dt\,(2V\,\text{coſ.}\,t + U\,\text{ſin.}\,t) + 2\,\text{coſ.}\,t \int dt\,(2V\,\text{ſin.}\,t - U\,\text{coſ.}\,t),$$

quae pro iſto caſu

$$= -3,0908 - 6,5298 = -9,6206,$$

concurrere debeant ad terminum iſtum $+ 10,1026$ ſin. t producendum? Ratio vero in eo latet, quod ſi haec integralia ſeorſim ſumantur, ex vnoquoque prodeant termini per ſin. $2t$ multiplicati, qui autem deſtruuntur, dum vtrumque integrale ſimul ſumitur.

§. 21. Quemadmodum expreſſio pro Φ' ex numeris noſtris inuenta, huiusmodi termino

$$+ 40,3623\,\tfrac{p°}{180} - 10,1026\,\text{ſin.}\,t,$$

corrigi debeat, ita quoque ſimul liquet expreſſionem pro u' inuentam, corrigi debere per terminum $L + M$ coſ. t, vbi quidem ſtatim perſpicuum eſt, valorem coefficientis M eſſe $= + 5,0513$. Quum ſcilicet ſit artic. 8:

$$u' = -\tfrac{1}{2}\int V\,dt - \frac{d\,\Phi'}{2\,dt},$$

atque in $d\,\Phi'$ contineatur terminus $+ 10,1026\,dt$ coſ. t, patet hinc in u' prodire terminum $- 5,0513$. coſ. t. Nam ex $\int V\,dt$ integrabili, et terminos inuoluentes ſolo angulo p affectos, terminus per coſ. t multiplicatus oriri nequit. Supponamus eſſe $p = 210°$, hinc igitur fiet

$$\text{coſ.}\,t \int \text{P. I.}\,dt. = -1,6248;\ \text{ſin.} \int \text{P. II.}\,dt. = +4,4897,$$

differentia eſt $+ 2,8649$, atqui terminus $+ 5,0513$. coſ. t praebet $+ 4,6049$, igitur terminus totalis pro u' reſultans erit $= + 7,4698$. At pro $p = 150$ conſecuti ſumus

 coſ.

$\text{coſ.}\, t \int \text{P.I.}\, dt = + 0,6858$; $\text{ſin.}\, t \int \text{P.II.}\, dt =$
$+ 9,3263$ et $5,0513\, \text{coſ.}\, t = - 2,5403$,

ideoque his terminis collectis prodit pro u', terminus $= + 7,4718$, qui cum illo pro $p = 210°$, ſatis bene congruit. Vnde exactitudo calculorum noſtrorum nouo ſpecimine comprobatur.

§. 22. Quemadmodum igitur iſtum terminum $M\, \text{coſ.}\, t$, quo expreſſio pro u' corrigi debet, facile inuenire licet, ita iſte terminus conſtans L maius faceſſit negotium. Atque ſi aequationis

$$u' = - \tfrac{1}{2} \int V\, dt - \frac{d\Phi'}{2\, dt},$$

vſum facere velimus, ob

$$\int V\, dt = - \frac{1}{m(1-b)} + \frac{1}{m \surd (1 - b\, \text{coſ.}\, p + b^2)} \text{ et}$$
$$- \frac{d\Phi'}{2\, dt} = + \frac{20,1812.\, m}{180°},$$

liquet iſtam conſtantem tribus componi partibus, nimirum quantitate $+ \frac{1}{2m(1-b)}$, $+ \frac{20,1812.\, m}{180°}$ et illa conſtante quae oritur dum $\frac{1}{\surd (1 - 2b\, \text{coſ.}\, p + b^2)}$ in huiusmodi euoluitur ſeriem:

$$A' + B'\, \text{coſ.}\, p + C'\, \text{coſ.}\, 2p + \text{etc.}$$

hoc eſt A' per $- \frac{1}{2m}$ multiplicata. Calculo autem inſtituto, reperitur

$$\frac{1}{2m(1-b)} = + 2,8892;\ \frac{20,1812.\, m}{180} = + 4,0183,$$

et denique vltimus $- \frac{A'}{2m} = - 0,9538$; hincque terminus conſtans in u' reperiundus erit $= + 5,9537$. Heic autem obſeruandum A' inueniri ope integralis

$$\int \frac{dp}{w} = m \int \frac{dt}{w} = \frac{m^2}{m} \int \frac{dt}{w},$$

erit enim coefficiens ipſius p pro angulo $p = 180°$, nam reliqui

reliqui termini ſin. p, ſin. $2p$ etc. inuoluentes, euaneſcunt. Terminus igitur $\frac{A'}{2m}$ inuenietur, ſi integrale, $\frac{1}{m}\int\frac{dt}{v}$ pro $p = 180°$, quod in noſtra Tabula inuenimus $+ 9,5803$ multiplicetur per $\frac{m}{2}$, tumque diuidatur per arcum $180°$ in partibus radii expreſſum; quo facto omnino prodibit, iſta quantitas $0,9538$.

§. 23. Deinde alia quoque ratione terminus iſte conſtans erui poterit ex conſideratione aequationis:

$$u' = -2\int V\,dt + \text{coſ.}\,t\int dt\,(2V\,\text{coſ.}\,t + U\,\text{ſin.}\,t)$$
$$+ \text{ſin.}\,t\int dt\,(2V\,\text{ſin.}\,t - U\,\text{coſ.}\,t);$$

vbi quidem primo de conſtantibus ex $\int V\,dt$ oriundis ex ſupra allatis patet, tum vero ſi concipiamus $\frac{1}{v^3}$ euolui in huiusmodi ſeriem:

$$A + B\,\text{coſ.}\,p + C\,\text{coſ.}\,2p \text{ etc., ob } U = \frac{1 - b\,\text{coſ.}\,p}{v^3},$$

liquet in integralibus iſtis per coſ. t, ſin. t multiplicatis, binos occurrere terminos qui conſtantes inuoluunt, nimirum $+ A.\,\text{coſ.}\,t\int dt.\,\text{ſin.}\,t - A\,\text{ſin.}\,t\int dt\,\text{coſ.}\,t = -A$; tumque

$$-bB\,\text{coſ.}\,t\int dt\,\text{ſin.}\,t\,\text{coſ.}\,p^2 + bB\,\text{ſin.}\,t\int dt\,\text{coſ.}\,t\,\text{coſ.}\,p^2$$
$$= -\frac{bB}{2}\text{coſ.}\,t\int dt\,\text{ſin.}\,t\,(1 + \text{coſ.}\,2p)$$
$$+ \frac{bB}{2}\text{ſin.}\,t\int dt\,\text{coſ.}\,t\,(1 + \text{coſ.}\,2p),$$

vbi omittendo terminos per coſ. $2p$ multiplicatos, quippe qui huc non ſpectant, conſequemur

$$-\frac{bB}{2}(\text{coſ.}\,t\int dt\,\text{ſin.}\,t - \text{ſin.}\,t\int dt\,\text{coſ.}\,t) = +\frac{bB}{2},$$

hincque terminus completus erit $-A + \frac{bB}{2}$, vbi vſum faciendo valorum pro A, et B, quos Cel. *de la Lande* in ſua Aſtronomia adfert, inuenietur $L = 5,9551$. Caeterum

rum quum terminorum A, B inueſtigatio, integrationem formularum $\frac{dp}{w^3}$, $\frac{dp. \text{coſ.} p}{w^3}$, quam quidem ſeorſim non tractavimus, ſupponat; determinatio quantitatis L hoc modo in iſta Methodo *Euleri* inſtitui non poteſt.

§. 24. Denique a poſteriori, hoc eſt ex ipſis noſtris calculis, eruimus L = 5, 9597, ſupponendo nimirum quod u' huius modi exprimatur formula

$$u' = A + B \text{ coſ. } p + C \text{ coſ. } 2p + D \text{ coſ. } 3p$$
$$+ E \text{ coſ. } 4p + F \text{ coſ. } 5p + G \text{ coſ. } 6p.$$

Per valores enim ipſius u', pro ſelectis quibusdam poſitionibus anguli p, determinauimus valores coefficientium A, B, C etc. Hae autem poſitiones erant:

$$p = 0;\ p = 30°;\ p = 45°;\ p = 60°;\ p = 90°;\ p = 120°;$$
$$p = 135°;\ p = 150°;\ \text{et } p = 180°.$$

In noſtris igitur calculis adhibebimus pro conſtante valorem ipſius u' ingrediente + 5, 9550. Ideoque iam patet ad valores noſtros pro u' inuentos continuo addendam eſſe hanc expreſſionem: − 5, 9550 + 5, 0513 coſ. t. Similique ratione ad valorem pro Φ', addi debere hanc quantitatem:

$$40.\ 3623\ \tfrac{p}{180} - 10,\ 1026 \text{ ſin. } t.$$

§. 25. Nunc igitur completos valores ipſorum u' et Φ', tam ex actione Veneris Solari, quam terreſti deriuandos, ſequenti Tabula repraeſentabimus, vbi Pars I. ſignificat perturbationem ab actione Solari deriuatam, Pars II, vero illam, quae ab actione terreſtri pendet:

Tabu-

	Tabula pro u'			Tabula pro Φ'		
	Pars I.	Pars II.	totum.	Pars I.	Pars II.	totum.
p=0	+6,8980	−0,9037	+5,9943	− 0,	− 0,	
5	+6,8717	−1,0763	+5,7954	− 1,4966	− 0,2636	− 1,7602
10	+6,7932	−1,5633	+5,2299	− 2,9819	− 0,3818	− 3,3637
15	+6,6629	−2,2902	+4,3727	− 4,4444	− 0,2499	− 4,6943
20	+6,4820	−3,1721	+3,3099	− 5,8732	+ 0,1890	− 5,6842
25	+6,2517	−4,1398	+2,1119	− 7,2571	+ 1,0368	− 6,2203
30	+5,9738	−5,1043	+0,8695	− 8,5861	+ 2,0558	− 6,5303
35	+5,6505	−6,0435	0,3930	− 9,8495	+ 3,4743	− 6,3752
40	+5,2841	−6,9011	−1,6170	−11,0379	+ 5,1845	− 5,8534
45	+4,8776	−7,6467	−2,7691	−12,1424	+ 7,1560	− 4,9864
50	+4,4339	−8,2517	−3,8178	−13,1545	+ 9,3523	− 3,8022
55	+3,9565	−8,6911	−4,7346	−14,0665	+11,6985	− 2,3680
60	+3,4490	−8,9425	−5,4935	−14,8716	+14,1701	− 0,7015
65	+2,9152	−9,0040	−6,0888	−15,5631	+16,7103	+ 1,1472
70	+2,3593	−8,859[illegible]	−6,4999	−16,1364	+19,2407	+ 3,1043
75	+1,7853	−8,5095	−6,7242	−16,5869	+21,7201	+ 5,1332
80	+1,1978	−7 9554	−6,7576	−16,9111	+24,0844	+ 7,1733
85	+0,6012	−7,2046	−6,6034	−17,1067	+26,2776	+ 9,1709
90	+0,0000	−6,2677	−6,2677	−17,1720	+28,2436	+11,0716
95	−0,6012	−5,1627	−5,7639	−17,1067	+29,9424	+12,8357
100	−1,1978	−3,9063	−5,1041	−16,9111	+31,2943	+14,3832
105	−1,7853	−2,5206	−4,3059	−16,5869	+32,2962	+15,7093
110	−2,3593	−1,0307	−3,3900	−16,1364	+32,8994	+16,7630
115	−2,9152	+0,5353	−2,3799	−15,5631	+33,0834	+17,5203
120	−3,4490	+2,1501	−1,2989	−14,8716	+32,8252	+17,9536
125	−3,9565	+3,7816	−0,1749	−14,0665	+32,1171	+18,0506
130	−4,4339	+5,4019	+0,9680	−13,1545	+30,9594	+17,8049
135	−4,8776	+6,9755	+2,0979	−12,1424	+29,3563	+17,2139
140	−5,2841	+8,4784	+3,1943	−11,0379	+27,3229	+16,2850

p	Tabula pro u' Pars I.	Pars II.	totum.	Tabula pro Φ' Pars I.	Pars II.	totum.
145	−5,6505	+ 9,8802	+4,2297	−9,8495	+24,8894	+15,0399
150	−5,9738	+11,1544	+5,1806	−8,5861	+22,0803	+13,4942
155	−6 2517	+12,2763	+6,0246	−7,2571	+18,9426	+11,6855
160	−6,4820	+13,2248	+6,7428	−5,8732	+15,5158	+ 9,6426
165	−6,6629	+13,9818	+7,3189	−4,4444	+11,8518	+ 7,4074
170	−6,7932	+14,5330	+7,7398	−2,9819	+ 8,0031	+ 5,0212
175	−6,8717	+14,8681	+7,9964	−1,4966	+ 4,0335	+ 2,5369
180	−6,8980	+14,9796	+8,0816	−0,0000	+ 0,0000	+ 0,0000

§. 26. Vt igitur nunc abſoluti valores perturbationum ab actione Veneris ortarum innoteſcant, qui ſunt $\lambda u'$, $\lambda \Phi'$, neceſſum eſt, vt coefficiens λ determinetur; quum vero ſit $\lambda = \frac{V}{S+T}$, deſignante V maſſam Veneris, S autem et T, maſſas Solis et telluris; haec quaeſtio eo reducitur vt ratio inter maſſas Solis et Veneris determinetur. Docuit quidem ſummus *Newtonus* Methodum qua determinatur ratio maſſarum pro binis corporibus coeleſtibus, quorum Satellitum tempora periodica nota habentur. Oſtendit etenim vim centripetam eſſe proportionalem huic fractioni $\frac{D}{t^2}$, deſignante D diſtantiam Satellitis et t tempus periodicum Planetae; tum vero quum ſit eadem vis centripeta quoque proportionalis huic fractioni $\frac{M}{D^2}$, deſignante M maſſam Planetae primarii, hinc omnino colligitur M proportionalis fractioni $\frac{D^3}{t^2}$, ideoque pro Planetis, qui Satellitibus gaudent, vti tellure, Ioue et Saturno, facile eorum maſſae determinantur. Quum vero non conſtet Veneri aliquem Satellitem addictum, neceſſum eſt, vt pro hoc Planeta, hypotheſis quaedam veriſimilis reſpectu denſitatis

ſitatis fingatur, vtpote ſi denſitate Veneris eam telluris aliquantulum ſuperante, ponatur maſſa Veneris aequalis maſſae telluris; quippe quum conſtet diametrorum rationem pro Venere et terra eſſe vt $16'', 52 : 17'', 26$. Scilicet ex vltimo tranſitu Veneris per Solem, inuenta eſt Diameter Veneris e terra viſa $= 57'', 2$ et Parallaxis Solis pro diſtantia media $= 8'', 63$ proxime. Nunc igitur rationem maſſarum Solis et telluris exquirentes, habebimus primum, rationem parallaxium Solis et Lunae $\frac{8'', 63}{57', 20''}$, tum vero rationem temporum periodicorum $\frac{27^D, 3}{365^D, 25}$, ideoque Maſſam Solis ad eam telluris, vt $350000 : 1$ circiter.

§. 27. Huius igitur valoris pro λ vſum adhibentes, ſequentem computauimus Tabulam pro perturbationibus in motu telluris ab actione Veneris oriundis, de qua quidem quatenus calculi noſtri in praecedentibus expoſiti, recte ſe habeant, nullum nobis ſupereſt dubium, quin exactiſſima ſit. Caeterum ſi Tabula haec conferatur cum illa, quae a Celeb. *de la Caille* ad praeſcriptum Methodi Illuſtris *de Clairaut*, computata eſt, praeſertim vero cum iſta, quae in Parte priori Actorum noſtrae Academiae Scientiarum, ſecundum Methodum Illuſtris *Euleri* a Celeb. *Fuſs* computata habetur; facile patebit ſingulas has Tabulas quoad correctionem anomaliae ſeu anguli Φ ſatis bene inter ſe conſpirare. Et quidem quantum ad Tabulam Dni. *de la Caille*, quia maximus valor perturbationis pro angulo Φ in iſta Tabula, ſit $+ 15'', 1$; quae in noſtra ponitur $10'', 6$; ſi numeri in Tabula *de la Caille* in iſta

 pro-

proportione diminuantur, numeri in noſtra Tabula allati producentur; vnde colligitur vnicum diſcrimen inter has Tabulas in numeris abſolutis reſidere, quum ſcilicet in Tabula Dni. *de la Caille* parallaxis Solis aliquanto maior ſit aſſumta ac illam ſtatuimus. Comparando autem noſtram Tabulam cum illa a Celeb. *Fuſs* computata, inuenimus eas pro valore anguli Φ ſatis bene inter ſe conſpirare, niſi pro valore $p = 2^s. $ et $2^s. 1°$; vbi valores a Dno. *Fuſs* inuenti, noſtris ſunt minores, cum potius maiores eſſe deberent, verum haec diuerſitas nullius plane eſt momenti. Verum quod correctionem diſtantiae attinet, quamuis generatim formae Tabularum congruant, tamen in particularibus valde magna occurrit differentia, et quidem pro Tabula Dni. *de la Caille* ſi ratio numerorum in noſtra Tabula, ad numeros in eius Tabula ſtatuatur 10″, 6 : 15″, 1, nullum eſt dubium quin numeri in Tabula Dni. *de la Caille* pluſquam duplo maiores ſtatuendi ſint, quam reapſe exhibentur. Cum tabula a Dno *Fuſs* computata, noſtra multo quidem melius conſentit, niſi quod Cel. *Fuſs* inuenerit hanc correctionem quae a $p = 0$ erat negatiua, pro $p = 1^s. 6°$ euaneſcere, cum nos inuenerimus hanc correctionem euaneſcere poſito $p = 1^s. 4°$; tum vero ſimul inuenit Cel. *Fuſs* correctionem negatiuam in poſitiuam abire, dum pro $p = IV^s. 2°$ euaneſcit, nos vero ſtatuimus hoc fieri, dum $p = IV^s\ 6$; ita vt interuallum quo correctio eſt negatiua apud Dnum. *Fuſs* contineatur inter $I^s. 6°$ et $IV^s. 2°$, cum in noſtra Tabula concludatur inter $I^s. 4°$ et $IV^s. 6°$.

§. 28. Quum ſit vti ſupra inuenimus:

$$\int V\, dt = \frac{-1}{m(1-b)} + \frac{1}{m\sqrt{(1 - 2b \cos. p + b^2)}} \text{ et}$$

$$\int dt \int V\, dt = \frac{-t}{m(1-b)} + \frac{1}{m^2} \int \frac{dp}{\sqrt{(1 - 2b \cos. p + b^2)}};$$

facile

facile perſpicitur non plane neceſſarium eſſe, vt calculi ineantur integralium $\int V\,dt$, $\int dt \int V\,dt$; quum prius ad quantitatem abſolutam $\frac{1}{m\sqrt{(1-2b\,\text{coſ.}\,p+b^2)}}$, poſterius ad integrale $\frac{1}{m}\int\frac{dt}{w}$, reducatur. Hinc autem hi calculi mirifice ſubleuantur, adeo vt non niſi quatuor integralium

$$\int U\,dt;\ \int dt\,(2\,V\,\text{coſ.}\,t + U\,\text{ſin.}\,t);$$

$$\int dt\,(2\,V\,\text{ſin.}\,t - U\,\text{coſ.}\,t);\ \frac{1}{m}\int\frac{dt}{w};$$

calculos inire neceſſum ſit. Quum igitur ratio qua haec integralia quaeruntur plane congruat cum Methodo, qua Illuſtris *de Clairaut*, pro expreſſione $\frac{1}{(1-2b\,\text{coſ.}\,p+b^2)^{\frac{3}{2}}}$, in huiusmodi ſeriem

$$A + B\,\text{coſ.}\,p + C\,\text{coſ.}\,2p + D\,\text{coſ.}\,3p + \text{etc.}$$

euoluta, coefficientium A, B, C, D, E etc. valores quaerit; facile perſpicitur Methodum *Euleri* hoc reſpectu iſtae *Clairaultianae* palmam praeripere. Scilicet ſi in Methodo Illuſtris de *Clairault*, quis exacte ſatis procedere velit, vsque ad terminum G coefficientem ipſius coſ. $7p$, hos calculos perſequi neceſſum habebit.

§. 29. Ex valore ſupra pro correctione u' inuento, conſtat in hanc correctionem praeter terminos, coſ. p, coſ. $2p$ etc. inuoluentes, non ingredi niſi binos terminos huius formae $L + M\,\text{coſ.}\,t$, vbi prior quantitatem ipſius ſemiaxis orbitae afficit, ideoque ſi illa rite fuerit conſtituta plane negligi poteſt; ſecunda vero Correctio ab angulo t dependens, ad locum aphelii Planetae reducitur. Quum igitur in correctionem u', nullus terminus ipſo angulo p affectus ingrediatur, facile liquet pro ſuppoſitione quod

 orbita

orbita Planete perturbati plane ſit circularis, ex perturbatione alius cuiusuis Planetae, nullam aliam variationem produci poſſe in Diametro orbitae Planetae perturbati, quam quae ſit periodica, ideoque ex hoc capite variationem motus medii prorſus nullam eſſe. Immo vero praeſumere licet, etiamſi conſideratio quoque excentricitatis vtriusque Planetae in computum ducatur, tamen nullum inde pro correctione u', prodire terminum quantitate p affectum. Id quod a priori, egregio ratiocinio confirmauit Illuſtr. *de la Grange* in Actis Academiae Berolinenſis pro Anno 1776. Iſte vero terminus angulo p affectus, qui correctionem Φ' ingreditur, exhibet motum aphelii, qui igitur cognoſceretur a priori, modo exactus valor maſſae Veneris haberetur determinatus.

V TERRAE

	V.		Sign.
iſt.	Long.	Diſt.	
–	+	+	
4	7, 9	14	30
4	7, 7	15	29
3	7, 5	15	28
3	7, 3	16	27
2	7, 1	16	26
1	6, 9	17	25
+	6, 7	17	24
1	6, 5	18	23
1	6, 2	18	22
2	6, 0	19	21
3	5, 7	19	20
3	5, 5	19	19
4	5, 2	20	18
5	4, 9	20	17
5	4, 7	21	16
6	4, 4	21	15
7	4, 2	21	14
7	3, 9	22	13
8	3, 6	22	12
8	3, 3	22	11
9	3, 0	22	10
9	2, 7	22	9
0	2, 4	23	8
0	2, 1	23	7
1	1, 8	23	6
2	1, 5	23	5
2	1, 2	23	4
3	0, 9	23	3
3	0, 6	23	2
4	0, 3	23	1
4	0, 0	23	0
+	–	+	Grad.
iſt.	Long.	Diſt.	
	VI.		Sign.

TABVLA PRO PERTVRBATIONIBVS IN MOTV TERRAE
AB ACTIONE VENERIS,
ARGVMENTVM
ELONGATIO VENERIS A TERRA.

Sign.	0.		I.		II.		III.		IV.		V.		Sign.
Grad.	Long. −	Diſt. +	Long. −	Diſt. +	Long. −	Diſt −	Long. +	Diſt. −	Long. +	Diſt. −	Long. +	Diſt. +	
0	0,0	17	3,8	2	0,4	15	6,5	18	10,6	4	7,9	14	30
1	0,2	17	3,8	2	0,2	15	6,7	18	10,6	4	7,7	15	29
2	0,4	17	3,8	1	+	16	6,9	17	10,6	3	7,5	15	28
3	0,6	17	3,8	1	0,2	16	7,1	17	10,6	3	7,3	16	27
4	0,8	17	3,7	−	0,4	17	7,3	17	10,6	2	7,1	16	26
5	1,0	16	3,7	1	0,7	17	7,6	16	10,6	1	6,9	17	25
6	1,2	16	3,7	1	0,9	17	7,8	16	10,6	+	6,7	17	24
7	1,4	16	3,6	2	1,1	18	8,0	16	10,5	1	6,5	18	23
8	1,6	16	3,6	2	1,4	18	8,2	15	10,5	1	6,2	18	22
9	1,8	15	3,5	3	1,6	18	8,4	15	10,5	2	6,0	19	21
10	2,0	15	3,4	4	1,8	18	8,5	14	10,5	3	5,7	19	20
11	2,2	15	3,3	4	2,0	18	8,7	14	10,4	3	5,5	19	19
12	2,4	14	3,2	5	2,2	19	8,9	13	10,4	4	5,2	20	18
13	2,5	14	3,1	5	2,5	19	9,0	13	10,3	5	4,9	20	17
14	2,7	13	3,0	6	2,7	19	9,2	12	10,2	5	4,7	21	16
15	2,8	12	2,9	7	3,0	19	9,3	12	10,1	6	4,4	21	15
16	3,0	12	2,8	8	3,2	19	9,5	11	10,0	7	4,2	21	14
17	3,1	11	2,7	9	3,4	19	9,6	11	9,9	7	3,9	22	13
18	3,2	11	2,5	9	3,7	19	9,7	10	9,8	8	3,6	22	12
19	3,3	10	2,4	10	3,9	19	9,8	10	9,7	8	3,3	22	11
20	3,4	9	2,2	10	4,2	19	9,9	9	9,6	9	3,0	22	10
21	3,5	9	2,1	11	4,4	19	10,0	9	9,5	9	2,7	22	9
22	3,5	8	1,9	11	4,6	19	10,1	8	9,4	10	2,4	23	8
23	3,6	8	1,8	12	4,9	19	10,2	8	9,2	10	2,1	23	7
24	3,6	7	1,6	12	5,1	19	10,3	7	9,1	11	1,8	23	6
25	3,7	6	1,4	13	5,4	19	10,3	7	8,9	12	1,5	23	5
26	3,7	6	1,2	13	5,6	19	10,4	6	8,7	12	1,2	23	4
27	3,7	5	1,0	14	5,8	18	10,4	6	8,5	13	0,9	23	3
28	3,8	4	0,8	14	6,0	18	10,5	5	8,3	13	0,6	23	2
29	3,8	3	0,6	15	6,2	18	10,5	5	8,1	14	0,3	23	1
30	3,8	2	0,4	15	6,5	18	10,6	4	7,9	14	0,0	23	0
	+ Long	+ Diſt	+ Long.	− Diſt.	− Long.	− Diſt	− Long.	− Diſt.	− Long.	+ Diſt.	− Long	+ Diſt.	Grad.
Sign.	XI.		X.		IX.		VIII.		VII.		VI.		Sign.

BREVIS EXPOSITIO
OBSERVATIONVM ASTRONOMICARVM
PRO
DETERMINANDO SITV GEOGRAPHICO VRBIS NESCHIN INSTITVTARVM.

A

PETRO INOCHODZOW.

De his obſeruationibus, quum iisdem inſtrumentis eademque Methodo inſtitutae ſint, eadem monenda habeo, quae de obſeruationibus in vrbe Orel factis monui. Errorem Quadrantis ex verificatione ad horizontem bis inſtituta reperi — 5′ 46″ et — 5′. 51′, qui cum probe congruat cum errore in Orel inuento, hinc retinui priſtinum errorem ſubtractiuum 5′. 50″. Altitudines Solis et fixarum meridianae vt ſpatio parcerem, ab errore inſtrumenti iam repurgatae ſunt; porro pro computanda declinatione Solis aſſumta eſt differentia meridianorum inter Lutetias Pariſiorum et urbem Neſchin numero rotundo duarum horarum.

Altitu-

Altitudines Solis meridianae.

Dies obſ. Styl. nou.	alt. limbi ⊙ ſuper.	Refrac. — Parall.	ſemidiam. Solis	Declin. ⊙	Latitudo.
				Auſtralis.	
24 Febr.	29°.55′.35″	1′. 46″	16′. 12″	9°.19′ 27″	51°.2′.56″
25 —	30. 17. 50	1. 44	— 11	8. 57. 10	2. 55
11 Mart.	35. 40. 15	1. 25	— 8	3. 34. 22	2. 56
12 —	36. 3. 38	1. 24	— 8	3. 10. 47	3. 7
13 —	36. 27. 25	1. 22	— 7	2. 47. 10	2. 54
14 —	36. 51. 0	1. 21	— 7	2. 43. 31	2. 57
				Borealis.	
21 —	39. 36 30	1. 13	— 5	0. 22. 18	3. 6
24 —	40. 47. 30	1. 9	— 4	1. 33. 9	2. 52
26 —	41. 34. 37	1. 7	— 4	2. 20. 14	2. 48
28 —	42. 21. 20	1. 5	— 3	3. 7. 7	2. 55
30 —	43. 7. 50	1. 4	— 3	3 53. 46	2. 53
1 April	43. 54. 25	1. 3	— 2	4. 40. 6	2. 46
2 —	44. 17. 30	1. 2	— 2	5. 3. 11	2. 45
3 —	44. 40. 16	1. 1	— 1	5. 26. 9	2. 55
4 —	45. 3. 15	1. 0	— 1	5. 49. 2	2. 50
6 —	45. 48. 40	0. 59	16 0	6. 34. 27	2. 46
10 —	47. 18. 10	0. 56	16 0	8. 3. 56	2. 42
11 —	47. 40. 12	0. 54	15 59	8. 25. 59	2. 40
12 —	48. 2. 5	0. 54	— 59	8. 47. 53	2. 41
22 —	51. 31. 50	0. 47	— 56	12. 18. 3	2. 56
23 —	51. 51. 47	0. 46	— 56	12. 38. 4	2. 58
24 —	52. 11. 30	0. 46	15 56	12. 57. 50	3. 2

Medium ex omnibus 51. 2. 53

Altitu-

Altitudines meridianae ſtellarum fixarum.

Dies obſ. St. nou.	Nomina Fixarum.	Altitudo.	Refract. *de la Cail.*	Declinat. appar.	Latitudo.
4 Febr.	Alcyone	62°.22'.28"	0'. 35'	23°.24' 35"	51°.2'.42"
	ζ Perſei	70. 10. 50	22	31. 13. 9	43
	ε Taur	57. 39. 5	44	18. 40. 47	26
	α ——	55. 1. 32	47	16. 3. 18	33
11 Febr.	ε Taur	57. 38. 50	44	18. 40. 46	40
	α ——	55. 1. 28	47	16. 3. 17	36
22 —	ε Taur	57. 38. 55	44	18. 40. 46	35
	α ——	55. 1. 35	47	16. 3. 17	29
20 Mart.	ζ Geminor.	59. 49. 58	38	20. 52. 15	55
	δ ——	61. 19. 45	0. 37	22. 21. 49	41
	β Can. min.	47. 41. 10	1. 0	8. 42. 42	32
	α Gemin.	71. 18. 35	0. 23	32. 20. 47	45
	Procyon.	44. 44. 35	1. 7	5. 46. 27	59
	β Gemin.	67. 29. 55	0. 28	28. 32. 4	37
21 Mart.	γ ——	55. 31. 53	46	16. 33. 57	50
	ε ——	64. 17. 34	32	25. 19. 29	2 27
	Syrius	22. 33. 36	2. 36	16. 25. 56	3. 4
	ζ Gemin.	59. 50. 0	0. 38	20. 52. 15	2. 50
	α ——	71. 18. 38	23	32. 20. 47	32
	Procyon.	44. 44. 35	1. 7	5. 46. 27	59
	β Gemin.	67. 29. 46	0. 28	28. 32. 4	46
3 April.	ε Leonis	63. 43. 58	33	24. 45 56	31
	μ ——	65. 59. 15	30	27. 1. 20	35
	α ——	51. 59. 38	52	13. 1. 30	44
	ζ ——	63. 27. 35	33	24. 29. 38	36
	γ ——	59. 54. 7	38	20. 56. 11	42
	ϱ ——	44. 23. 45	57	10. 25. 18	30

Dies obſ. St. nou.	Nomina Fixarum.	Altitudo.	Refract. *de la Cail.*	Declinat. appar.	Latitudo.
5 April.	ε Leon.	63°.43′.49″	33′	24°45.′56″	40″
	μ —	65 59.19	30	27. 1.20	31
	α —	51. 59.45	52	13. 1.30	37
	ζ —	63. 27. 35	33	24. 29. 39	37
	γ —	59. 54. 13	38	20. 56. 12	37
	ϱ —	49. 23. 35	57	10. 25. 19	41
21 April.	α Leon.	51. 59 35	52	13. 1.31	48
	ζ —	63. 27. 39	33	24. 29. 39	33
	γ —	59. 54. 5	38	20. 56 12	45
	ϱ —	49. 23. 30	57	10. 25. 19	46
22 —	ε Leon.	63. 43. 45	33	24. 45. 57	45
	μ —	65. 59. 9	30	27. 1.21	42
	α —	51. 59 38	52	13. 1.31	45
	ζ —	63. 27. 27	33	24. 29. 39	45
	γ —	59. 53. 55	38	20. 56. 12	55
	ϱ —	49. 23. 33	57	10. 25. 19	43

Medium ex omnibus 51. 2.41

Vnde liquet latitudinem vrbis Neſchin ſtatui poſſe 51°. 2′. 45″; qualis nempe prodit ex altitudinibus Solis et fixarum menſe Aprili captis.

Obſeruationes pro definienda longitudine.

$\frac{14}{25}$ Ianuarii Occultatio fixae 136^{tae} in conſtellatione Tauri ad limbum Lunae obſcurum - 14^{h}. 39′. 26″ T. v. occultatio haec erat momentanea

Emerſio

Emerſio eiusdem ad limbum
lucidum - - - - $15^h. 30'. 37''$

Vltima obſeruatio eſt ſubdubia; quia ſtella exiguo interuallo a limbo Lunae diſtabat, et veram emerſionem aliquot ſecundis citius contigiſſe arbitror.

$\frac{6}{17}$ Februari Occultatio Martis a Luna.

Limbus Martis tangere videtur limbum Lunae obſcurum - - -	$6^h. 7'. 45''$
ac deinde in illum quaſi intrauit	
Immerſio totalis	6. 8. 5
eadem a ſocio obſeruata	6. 8. 1
Emerſio eiusdem aliquantum ſero obſeruata - - - - -	6. 28.

Ambae hae obſeruationes factae ſunt ad horologium in habitaculo ſuſpenſum, in cuius motum per altitudines Solis reſpondentes, in priori caſu ad excitatum horologium aſtronomicum in obſeruatorio locatum, in poſteriori vero ad horologium portatile ſcrupula ſecunda indicans inquiſiui comparatione inſtituta. Hinc in reductione temporis veri dubium aliquot ſecundorum, forſan ad ſemiminutum primum, ineſſe poteſt. Sequentes obſeruationes ſatellitum Iouis hoc incommodo non laborant, inſtitutae enim ad horologium obſeruatorii, cuius deinde interruptus motus per altitudines correſpondentes ſatis exploratus.

$\frac{11}{23}$ Februarii Immerſio 1^{mi} ſatellitis

Satelles vix videtur - -	$17^h. 35'. 30''$. T. v.
Immerſio certa - - -	17. 35. 50

 Coelum

Coelum erat ſerenum, faſciae mediocriter conſpiciebantur, Iupiter tamen bene terminatus et reliqui ſatellites clare micabant.

27 Febr./10 Mart	Immerſio 1^{mi} Satellitis - -	15^h.	$53'$.	$54''$
	ſub iisdem circumſtautiis ac praecedens obſeruatio			
9/20 Mart.	Emerſio 3^{tii} ſatellitis - -	15.	22.	24
	eadem a Socio - - -	15.	22.	50
	Aëre ſereno, faſciis ſat conſpicuis			
16/27 Mart.	Immerſio 3^{tii} ſatellitis			
	Lumen ſatellitis valde debilitatum ita vt vix videtur - - -	16.	55.	42.
	Immerſio totalis - - -	16.	55.	54
	eadem a Socio - - -	16.	55.	51
	Coelo ſereno, diluculo fortiori, faſciis tamen bene conſpicuis			
25 Mart./5 April.	Immerſio 1^{mi} Satellitis			
	Satelles occultari videtur -	16.	7.	58
	Immerſio totalis - - -	16.	8.	13
	eadem a Socio - - -	16.	8.	10

Nubeculae tenues Iouem circumſtabant et Luna vicina, quam ab cauſam ſubdubia eſt.

21/2 April.	Immerſio 2^{di} ſatellitis			
	Lumen ſatellitis valde imminutum	14.	58.	36
	Immerſio certa - - -	14.	59.	0

Coelo ſereno et quieto faſciis ſatis bene conſpicuis.

Omnes

Omnes hae obſeruationes inſtitutae a me teleſcopio Gregoriano Schorti 30 pollicum, a Socio autem tubo Dollondiano.

Vt praeuia ſaltem ex his obſeruationibus (donec illae cum ſuis correſpondentibus alibi inſtitutis conferantur) Longitudo huius loci innoteſcat, comparaui eclipſes 1 et 2 ſatellitis cum momentis ex ephemeridibus deſumtis.

11/22 Febr. Immerſ. 1^{mi} in Neſchin - -	17^h.	35$'$	50$''$
eadem Pariſiis - - - - -	15.	38.	23
dat differentiam - - - -	1.	57.	27
27 Febr./10 Mart. Immmerſ. 1^{mi} in Neſch. - -	15.	53.	54
Pariſ. - - - - - -	13.	56.	21
praebet diff. - - - - -	1.	57.	33
22 Mart./2 April. Immerſ. 1^{mi} in Neſch. - - -	16.	8.	13
eadem Pariſ. - - - -	14.	11.	8
adeoque differ. - - - -	1.	57.	5
12/23 April. Immerſ. 2^{di} in Neſch. - -	14.	59.	0
Pariſ. - - - - - -	13.	1.	32
	1.	57.	28
Ex his media - - -	1^h.	57$'$.	23$''$
vel reiciendo 3^{iam}, vt dubiam	1.	57$'$.	30

Declinationem Acus magneticae repetitis obſeruationibus inueni 10 graduum a ſeptentrione ad occaſum.

EPITOME
OBSERVATIONVM METEOROLOGICARVM PETROPOLI ANNO MDCCLXXIX. SECVNDVM CALENDARIVM GREGORIANVM INSTITVTARVM.

Auctore

IOANNE ALBERTO EVLER.

I. Barometrum.

1. Barometri altitudines maximae, minimae et mediae, vna cum variatione maxima et ſtatu medio, pro ſingulis menſibus anni 1779.

Menſe	Altitudo maxima		Altitudo minima		Variatio	Medium	Altitudo media
	Dig. p. c.	die hora	Dig. p. c.	die hora	Dig. p. c.	Dig. p. c.	Dig. p. c.
Ianuar.	28. 83	22. IX. p. m.	27. 18	5. III. p. m.	1 65	28. 00	28. 06
Februar.	28. 46	16. VI. p m.	26. 97	19. XI p. m.	1. 49	27 72	27. 91
Mart.	28. 53	4. X. p. m.	27. 20	2 X p. m.	1. 33	27. 87	28. 02
April.	28. 48	1. IV. a. m.	27. 05	16. IV. a. m.	1 43	27. 77	27. 75
Maii	28. 33	27. II p m.	27. 57	20 IX. a. m.	0. 76	27. 95	28 06
Iunii	28. 26	8. II. p. m.	27. 68	27 Meridie.	0. 58	27. 97	27. 91
Iulii	27. 89	9. III p. m	27. 31	1. IV. a. m.	0. 58	27 60	27. 67
Auguſti	28 12	17. Meridie.	27. 40	25. I. p m.	0. 72	27. 76	27. 93
Sept.	28. 27	27. Meridie.	27. 27	9 Meridie.	1. 00	27. 77	27. 76
Octobr.	28. 42	15. X. a m.	26 88	30. VI a. m.	1. 54	27. 65	27. 96
Nouembr.	28 43	8. Med. noct.	27. 07	2. V. a. m	1. 36	27 75	27. 85
Decembr.	28. 38	28. IX. p. m.	26. 88	4. IV. p m.	1. 50	27. 63	27 71
Anno 1779.	28. 83	Menſe Ianuarii.	26. 88	Menſibus Octobris et Decembris.	1. 95	27. 85	27. 88

2. Nu

2. Numerus dierum quibus altitudo Barometri ſuperabat terminos quosdam circa altitudinem 28 poll.

Menſe	ſupra 28. 20 Dies, horae	ſupra 28. 10 Dies. horae	ſupra 28. 00 Dies, horae	ſupra 27. 90 Dies, horae	ſupra 27. 80 Dies, horae	per dimidium menſis ſupra Dig. p. c.
Ian.	10. 15	14. 18	18. 12	20. 9	22 6	28. 08
Febr.	7. 3	9 9	10. 12	15. 9	18. 15	27. 93
Mart.	7. 21	13. 18	16 15	19. 15	24. 6	28. 05
April.	1. 6	3. 9	5. 21	8. 9	11. 3	27. 74
Maii	8. 0	14. 12	21. 6	25. 15	29. 12	28. 08
Iunii	1 15	4. 15	8. 3	14. 6	23. 12	27. 89
Iulii	0. 0	0. 0	0 0	0. 0	2. 12	27. 70
Aug.	0. 0	1. 6	9. 21	19. 0	26. 12	27. 94
Sept.	2. 15	4. 6	5. 21	6. 3	9 21	27. 73
Oct.	7. 15	13. 9	17. 21	22. 3	23. 21	28. 05
Nou.	4. 6	5. 12	7. 0	10. 21	16. 3	27. 83
Dec.	2. 15	4. 3	9. 6	12. 15	14. 18	27. 76
Anno 1779.	53. 15	88. 21	131. 6	174. 3	222. 21	27. 88

Duae priores figurae altitudinum barometricarum pollices integros deſignant, quorum duodecim pedem regium pariſinum conſtituunt, poſteriores vero partes centeſimas vnius pollicis. Tum vero monendum eſt *a. m.* ſignificare *ante Meridiem*, *p. m.* autem *poſt Meridiem.*

Colligitur ex his binis tabulis, pro toto anno.

1. Altitudo maxima Barometri 28, 83: menſe Ianuarii die 22, hora 9 poſt meridiem. Thermom. *Delisl.* 189. Vento leniter ſpirante ex oriente, et coelo exiſtente ſereno.

2. Alti-

2. Altitudo minima Barometri 26, 88: menſibus, Octobris die 30, hora matutina 6ta et Decembris die 4ta poſt meridiem. Illa die 30 Octobr. Thermom. *Delisl.* 142. Coelum obductum, nix et pluuia, Vento e meridie flante. Hac die 4 Dec. Thermom. *Delisl.* 148. Coelum obductum, pluuia, procella e S W.

3. Variatio maxima 1, 95 ſeu 1 $\frac{19}{20}$ poll.

4. Medium inter maximam altitudinem et minimam 27, 85 vel 27 $\frac{17}{20}$ poll.

5. Altitudo media inter omnes obſeruatas 27, 88 vel 27 $\frac{22}{25}$ poll.

6. Denique mercurius in tubo Barometri ſe ſuſtentabat ſupra

28, 20	poll.	per dies	53 $\frac{5}{8}$
28, 10	poll.	per dies	88 $\frac{7}{8}$
28, 00	poll.	per dies	131 $\frac{1}{4}$
27, 90	poll.	per dies	174 $\frac{1}{8}$
27, 80	poll.	per dies	222 $\frac{7}{8}$

vnde concluditur mercurium ſe ſuſtentaſſe per interuallum dimidii anni vel 182½ dierum ſupra altitudinem 27, 88, quae prorſus conuenit cum altitudine media.

III. Des-

3. Deſcenſus et aſcenſus mercurii in tubo Barometri notabiliores.

Menſe	Tempore die hora	Diff. hor.	Barom. Dig p. c.	Diff. p. c.	Therm.	Ventus.	Atmoſphaera.
Ian.	1. o. a. m.	46	27. 31	83	161	SO. deb	coelum obductum.
	2. 10. p. m.		28. 14		170	NO. fort.	coelum ſerenum
	3. 3. p. m.	14	28. 05	58	170	W. fort	coelum obductum
	4. 8. a. m		27. 47		152	W. deb.	coelum obductum, nix
	5. o. a. m.	15	27. 70	52	152	W.	coelum obductum nix copioſa.
	5. 3. p m.	45	27. 18	134	149		
	7. meridie		28. 52		175	SO. fort	coelum ſerenum
	9. o. a. m.	9	28. 00	30	152	NW fort.	coelum obductum
	9. 9. a. m.	27	27. 70	57	150		nix.
	10. meridie	18	28. 27	66	168	W.	coelum ſerenum
	11. 6. a. m.	24	27. 61	55	156	NW fort.	coelum nubilum
	12. 6. a. m.	15	28. 16	72	169	W. fort.	—— ſerenum
	12. 9. p. m.		27. 44		157	SW fort.	coelum obd. nix, procell.
	16. 6. p. m.	27	27. 67	67	158	SO. fort.	coelum obductum nix
	17. 9. p. m.	12	28. 34	37	172	N. fort.	coelum ſerenum
	18. 9. a. m.	42	27. 97	77	160	N.	—— obductum, nix
	20 3. a. m.		28. 74		194	NO.	coelum ſerenum, nebula
	23. 2. a. m.	34	28. 83	72	189	N.	coelum ſerenum, nebula
	24. meridie		28. 11		166	S.	coelum obductum
	30. 2. a. m.	43	28. 30	93	160	W.	coelum obductum, nix
	31. 9. p. m.		27. 37		150	SW. fort.	coelum obductum, procella
Febr.	1. o. a. m.	45	27. 47		151	SW.	coelum obductum, nix
	2. 9. p. m.		28. 22	85	172	N.	coelum ſerenum

Deſcenſus et aſcenſus Barometri notabiliores.

Menſ.	Tempore die	hora	Diff. hor.	Barom. Dig. p. c.	Diff. p. c.	Therm.	Ventus.	Atmoſphaera.
	5.	6. a. m.	21	27. 62	55	156	W.	coelum nubilum
	6.	3. a. m.		27. 07		151	W. fort.	coelum obductum
	7.	8. a. m.	50	27. 03	139	154	NW. fort.	coelum obductum, nix
	9.	10. a. m.	20	28. 42	57	151	W.	coelum ſerenum, nebula
Febr.	10.	6. a. m.		27. 85		154	NW. fort.	coelum ſerenum, procella
	14.	meridie	24	28. 42	74	175	N. fort.	coelum ſerenum, nebula
	15.	meridie	30	27. 68	78	147	W. fort.	nix, coel. obduct. proc. pluu.
	16.	6. p. m	21	28. 46	51	175	O.	coelum ſerenum, nix
	17.	3. p. m.		27. 95		158	S.	coelum obductum.
	19.	meridie	10	27. 67	70	145	SW. fort.	ſerenum, poſtea obductum
	19.	10 p. m.	24	26. 97	90	149	SW.	coelum obductum
	20.	10. p. m.		27. 87		155	NW.	coelum ſerenum
	25.	3. a. m.	21	27. 87	47	149	NW.	coelum nubilum
	25.	med. noct.		28. 34		154		coelum ſerenum
Mart.	2.	3. a. m.	19	27. 78	58	158	S.	coelum ſerenum
	2.	10. p. m.	48	27. 20	133	151	SO. fort.	coelum obduct., nix copioſa
	4.	10. p. m.	34	28. 53	84	172	SO.	coelum ſerenum
	6.	8. a. m.	34	27. 69	82	154	W. fort.	coelum obductum
	7.	6. p. m.		28. 51		160	NW.	coelum ſerenum
	13.	6. a. m.	36	28. 16	75	150	W	coelum obductum, nix
	14.	6. p. m.	39	27. 41	57	150	W. fort.	coelum nubiloſum
	16.	9. a. m.		27. 98		165	NW.	coelum nubiloſum
April.	4.	9. p. m.	37	27. 54	68	149	NW.	coelum ſerenum
	6.	10. a. m.	24	28. 22	88	154	NW.	coelum nubiloſum
	7.	10. a. m.		27. 34		151	N. fort.	coel. obd. nix copioſa, procell.

Deſcen-

Deſcenſus et aſcenſus Barometri notabiliores.

Menſe	Tempore die hora	Diff. hor.	Barom. Dig. p. c.	Diff. p. c.	Therm.	Ventus.	Atmoſphaera.
	7. 6. p. m.	29	27. 30	48	150	S.	coelum obductum, nix
	8. 11. p. m.	15	27. 78	38	160	N.	coelum ſerenum
	9. 2. p. m.		27. 40		152	SO.	coelum obduct. nix, pluuia
	11. 2. p. m.	20	27. 81	48	148	W.	coelum nubiloſum, nix
	12. 10. a. m.		27. 33		143	SW. fort.	coel. nubil. pluuia. procell.
April.	12. 11. p. m	24	27. 37	51	146	SW. fort	coelum nubiloſ., pluuia
	13. 11. p. m.	9	27. 88	31	152	NW.	coelum ſerenum
	14. 8. a m.	16	27. 57	37	150	W.	coelum obductum, nix
	14. med. noct.	28	27. 94	89	153	W. fort.	coelum ſerenum
	16. 4. a. m.	20	27. 05	73	142	SW. fort.	coel. obd. pluuia, nix, procell.
	16. med. noct.		27. 78		158	N.	coelum ſerenum
	19. 9. a. m.	21	28. 18	58	151	W.	coelum nubiloſum
	20. 6. a. m.		27. 60		148	N.	coelum obductum pluuia
	22. 10. a. m.	14	27. 43	37	140	SW. fort.	coelum nubiloſ. pluuia
	22. med. noct	16	27. 80	50	147	S. fort.	coelum ſerenum
	23. 4. p. m.		27. 30		140	S. fort.	coel. nub. procell. pluuia cop.
Iunii	29. meridie	40	28. 04	73	124	W.	coelum ſerenum
Iulii	1. 4. a. m.		27. 31		131	W. fort.	coel. obduct. pluuia, procell.
	22. 9. p. m.	12	27. 83	33	137	W.	coelum nubilum
	23. 9. a. m.	39	27. 50	54	140	SW.	pluuia copioſa
	24. med. noct.		27. 04		141	W.	coelum nubiloſum
Oct.	29. 0. a. m.	18	27. 30	40	141	SW.	coelum nubiloſum
	29. 6. p. m.		26. 90		140	S.	pluuia copioſa
	30. meridie	36	26. 90	87	138	S.	coel. obductum. pluuia cop.
	31. med. noct.		27. 77		148	N.	nix, coelum obductum

Deſcen-

Deſcenſus et aſcenſus Barometri notabiliores.

Menſe	Tempore die hora	Diff. hor.	Barom. Dig. p. c.	Diff. p. c.	Therm.	Ventus.	Atmoſphaera.
	1. 6. a. m.	23	27. 81	74	148	malacia	coelum obductum, pluuia
	2. 5. a. m.	43	27. 07	78	146	NW.	coelum obduct., nix
	3. med. noct		27. 85		155	N fort.	coelum ſerenum, procell.
Nou.	17. 2. p. m.	20	27. 62	45	149	S. fort.	coel. nub. nix, pluuia, procell.
	18. 10. a m.	24	28. 07	43	147	S. fort.	coelum obductum, procell.
	19. 10. a. m.	17	27. 64	31	144	S. fort.	pluuia, procell.
	20. 3. a. m.	18	27. 95	25	148	S. fort.	coelum nubiloſum
	20. 9. p. m.	21	27. 70	25	145	S. fort.	coelum obduct. nix, pluuia
	21. 6. p. m.	21	27. 95	59	148	W.	coelum ſerenum, nubilum
	22. 3. p. m.	9	27. 36	33	143	S.	nix, pluuia
	22. med noct.		27. 69		143	S. fort.	coelum obductum
	28. 6. a. m.	12	27. 35	30	151	O. fort.	coelum obductum, procella
	28. 6. p. m.		27. 45		156	O. fort.	coelum obductum
	29. 6. a. m.		27. 75		159	O.	coelum obductum
	30. 6. a. m.		27. 91		168	NO.	coelum nubiloſum.
Dec.	3. 6. p. m.	21	27. 56	68	162	SO.	nix, coelum obductum
	4. 3. p m.		26. 88		148	SW. fort.	coel obduct. pluuia, procell.
	18. 10. p. m.	17	27. 90	63	168	W. fort.	coel. obd. nix cop. procell.
	19. 3. p. m.	27	27. 27	65	156	S. fort.	nix, procella
	20. 6. p. m.	30	27. 92	100	172	SW.	coelum ſerenum
	21. med. noct.	18	26. 92	56	155	SW. fort.	nix cop. pluuia, procella
	22. 6. p. m.	9	27. 48	36	155	SW.	coelum nubiloſum
	23. 3. a. m.	21	27. 12	37	149	SW. fort.	coelum obductum
	23. med. noct.		27. 49		150	W. fort.	coelum obductum, procella
	30. meridie	21	28. 28	36	158	N.	coelum nubiloſum
	31. 9. a. m.		27. 92		154	SW. fort.	nix, coelum nubiloſum

II. Ther-

II. Termometrum.

1. Thermometri altitudines minimae, maximae et mediae pro ſingulis menſibus anni 1779.

Menſe	Altitudo minima Gr.	die	hora	Altitudo maxima Gr.	die	hora	Diff. Gr.	Altit. media nocte Gr.	meridie Gr.
Ian.	201	21	7. a. m.	147	31	2. p. m.	54	171	163
Febr.	188	12	7. a. m.	141	26	2. p. m.	47	165	154
Mart.	175	4	7. a. m.	136	22	2. p. m.	39	156	148
April.	165	8	7. a. m.	126	28	2. p. m.	39	151	142
Maii	143	2, 4, 5, 1[illegible]	6. a. m.	115	28	2. p. m.	28	137	129
Iunii	147	2	6. a. m.	115	15	2. p. m.	32	132	124
Iulii	136	15	6. a. m.	112	27	2. p. m.	24	128	119
Aug.	139	29	6. a. m.	110	12	2. p. m.	29	129	119
Sept.	146	25	6. a. m.	116	7	2. p. m.	30	135	127
Oct	157	18	6. a. m.	125	3	2. p. m.	32	144	137
Nou.	178	30	10. p. m.	141	24	6. a. m. 10. p. m.	37	153	149
Dec.	177	1	6. a. m.	147	4 23	10. p. m. 10. a. m.	30	165	159
Anno 1779.	201 Gr. Menſe Ianuarii			110 Gr Menſe Auguſti			91	147	139

2. Sta-

2. Status frigoris et caloris.

Menſe.	Dies frigidiores Gradibus.							Dies calidior. Grad.			
	200	190	180	170	160	150	140	120	130	140	150.
Ianuar.	1	4	6	14	23	31	31				2.
Februar.			5	11	14	26	28				14.
Mart.				2	9	24	31			4	20.
April.					2	16	29		2	11	27.
Maii							10	2	16	31	31.
Iunii							8	14	22	28	30.
Iulii								16	31	31	31.
Auguſt.								21	29	31	31.
Septembr.							4	3	21	30	30.
Octobr.						6	24		5	23	31.
Nouembr.				1	5	17	30				19.
Decembr.				7	24	31	31				3.
Anno 1779.	1	4	11	35	77	151	226	56	126	189	269.

3. Speciatim frigus obſeruatum fuit intra gradus.

		Dies.
200 et 210	die 21 Ianuarii - - -	1
190 et 200	die 20. 22. 23 Ian. - - -	2
180 et 190	die 7. 19 Ian. et die 9. 11. 12. 14. 16 Februarii - - -	7
170 et 180	die 2. 3. 6. 10. 13. 15. 16. 17 Ian. die 2. 3. 7. 8. 13. 17 Febr. die 4. 5 Mart. die 30 Nou. et die 1. 8. 10. 12. 18. 20. 28 Decembris - -	24

160

		Dies.
160 et 170	die 1. 9. 12. 14. 18. 24. 27. 28. 29 Ian. die 10. 15. 21 Febr. die 3. 7. 8. 15. 16. 30. 31 Mart. die 1. 8 April. die 5. 6. 8. 29. Nou. et die 2. 3. 6. 7. 9. 11. 13. 14. 15. 17. 19. 21. 25. 27. 29. 30. 31. Decembris - - -	42

Calor autem deprehenſus fuit intra gradus.

		Dies.
120 et 110	die 27. 28 Maii, die 10. 11. 13. 14. 15. 17. 19. 20. 21. 23 — 26. 30 Iunii, die 6. 11. 18 — 31 Iulii, die 1 — 12. 16 — 21. 23 24. 25 Auguſti, et die 4. 6. 7 Septembris - - - -	56
130 et 120	die 28. 29 Aprilis, die 6. 7. 9. 11 — 16. 19. 20. 22. 26. 29 Maii, die 9. 12. 16. 18. 22. 27. 28. 29 Iunii, die 1 — 5. 7 — 10. 12 — 17 Iulii, die 13. 14. 15. 22. 27. 29. 30. 31 Aug. die 1. 2. 3. 5. 8 — 13. 18. 19. 20. 26 — 30 Sept., et die 1 — 5 Octobris - - -	70
140 et 130	die 21. 22. 25. 27 Martii, die 12. 15. 21. 22. 23. 25. 26. 27. 30 Apr., die 1 — 5. 8. 10. 17. 18. 21. 23. 24. 25. 30. 31 Maii, die 1. 3. 4. 6. 7. 8 Iunii, die 26. 28 Aug., die 14 — 17. 21 — 25 Sept. et die 6 — 10. 18 — 30 Octobris - - - - - -	63

Ex

Ex Tabula 1ma intelligitur, per totum annum fuiſſe:

Altitudinem Thermometri minimam, ſeu gradum frigoris maximi 201 grad. *Deliſl.* menſe Ianuarii die 21, hora matutina 7^{a}; Barometrum tunc temporis momento 28. 56; Coelo ſereno exiſtente, vento leniter flante e regione NO.

Altitudinem Thermometri maximam, ſeu gradum caloris maximi 110 grad. *Deliſl.* die 12 Auguſti, hora poſtmeridiana 2da, Barometrum 27. 89; coelum magna ex parte ſerenum; malacia.

Hinc variatio Thermometri maxima 91 gradum.

Altitudo Thermometri media inter omnes quae mane et veſpere obſeruatae fuerunt, inuenta eſt 147 graduum: ea autem quae ex obſeruationibus poſtmeridianis eruta eſt aequatur 139 gradibus. Sin autem menſes aeſtiuos Maium — Octobrem, ab hyemalibus Ianuar. — April. Nou. Decembr. ſeparamus reperimus in illis calorem medium fuiſſe 126 gr., et in his frigus medium 160 graduum.

Porro oſtendit Tabula 2^{a} fuiſſe tantum 151 dies frigidiores gradu 150, hoc eſt congelationis naturalis termino, inter quos quidem 77 fuerunt dies, quibus frigus ſuperabat 160 gradus et 35 dies quibus excedebat 170 gradus. In his vero numerauimus 11 dies frigidiores gradu 180, et 4 frigidiores gradu 190, inter quos vnicus fuit, quo Thermometri altitudinem infra 200 obſeruauimus.

Deinde quoad calorem, patet ex eadem Tabula, hoc 1779 anno fuiſſe 269 dies, quibus altitudo Thermometri

metri praeualuit termino congelationis 150 et inter hos 189 dies fuiſſe calidiores gradu 140: porro 126 dies calidiores gradu 130; inter quos autem 56 dies annotauimus quibus calor ſuperabat gradum 120.

III. Ventus et Ventorum Directiones.

Menſe	Malacia	Vent lenis	Vent. fortis	Procelloſus	Nord	N-O	Oſt	S-O	Sud	S-W	Weſt	N-W	Variabilis
	dies	dies	dies	dies	dies	dies	dies	dies	die	dies	dies	dies	dies
Ianuar	1	14	12	4	3	4	2	3	2	5	10	2	
Febr.	2	12	10	4	6	1	1	10	0	0	3	7	
Mart.	4	16	8	3	1	0	1	2	1	4	13	9	
April	5	9	11	5	5	0	0	1	5	4	10	5	
Maii	9	10	8	4	1	3	9	1	2	4	6	5	
Iunii	9	7	13	1	1	8	2	3	5	3	4	4	
Iulii	11	12	6	2	0	11	6	1	2	1	10	0	
Aug.	13	10	7	1	5	3	5	1	1	1	10	5	
Sept.	12	9	7	2	1	0	2	3	6	6	8	2	2
Oct.	6	19	6	0	2	0	2	3	12	6	6	0	
Nou.	3	10	13	4	2	2	5	4	13	1	2	1	
Dec.	6	6	10	9	2	0	3	3	7	10	6	0	
Anno 1779.	81	134	111	39	29	32	38	35	56	45	88	40	2

Vnde patet hoc anno maxime regnaſſe zephirum et quidem menſibus Martii, Aprilis, Ianuarii, Auguſti et Iulii, tum vero Auſtrum, praeſertim menſe Nouembris et Octobris. Porro malaciae obſeruatae fuerunt frequentius menſibus Auguſti, Septembris et Iulii, ac procellae frequentius deprehenſae fuerunt menſibus Decembris, Aprilis, Nouembris et Ianuarii.

Speciatim vero procellae hoc anno flauerunt e regione.

	Dies.
N. die 3 Nou. - - - - - -	1
NO. die 29 Maii - - - - - - -	1
O. die 20 Iulii et die 1 Dec. - - - -	2
SO. die 6 Ian. - - - - -	1
S. die 7. 23 Aprilis, die 2. 12 Maii, die 30 Iun., die 19 Sept., die 17. 18 Nou., et die 14. 19. 24. 25. et 27 Decembris - - -	13
SW. die 12. 27. 31 Ian., die 18 Febr., die 12. 16 Apr., die 6 Maii, die 8 Sept., die 19 Nou. et die 4 et 22 Decembris - - - -	11
W. die 5. 15 Febr., die 14. 28 Mart., die 15 Apr. die 31 Iulii, die 22 Aug., et die 21 Decembris. - - - - -	8
NW. die 10 Febr. et die 1 Martii. - - -	2

IV. Con-

IV. Conſtitutio Coeli.

Menſe.	Coelum ſerenum dies	Coelum obductum dies	Nebuloſum dies	Pluuia dies	Nix dies	Quantit. aquae pluuiae. Dig. p. c.
Ianuar.	6.	13.	5.		14	0, 39.
Februar.	4.	6.	3.	2.	7.	0, 32.
Martii	8.	8.	4.	3.	8.	0, 68.
Aprilis	4.	7.	1.	15.	10.	2, 43.
Maii	5.	7.	1.	21.		2, 41.
Iunii	14.	4.	0.	8.		0, 75.
Iulii	11.	3.	1.	16.		1, 45.
Auguſti	17.	1.	5.	6.		1, 10.
Septemb.	9.	9.	9.	14.		2, 27.
Octobr.	10.	9.	6.	13.	1.	0, 90.
Nouemb.	2.	17.	1.	11.	15.	0, 62.
Decemb.	3.	11.	5.	2.	15.	0, 83.
Anno 1779.	93.	95.	41.	111.	70.	14, 15.

Excellebant ergo quoad ſerenitatem coeli menſes Auguſti, Iunii, Iulii et Octobris. Frequentius pluit menſe Maii, Iulii, Aprilis, et Septembris, et nix copioſa cecidit praeſertim menſe Nouembris, Decembris, Ianuarii et Aprilis. Quantitas aquae pluuiae et niuis vero, a die 12 Ianuarii huius anni ad diem 12 Ianuarii anni proxime ſequentis 1780 aequiualet $14\frac{15}{100}$ pollicum. Nebulae in maiori copia obſeruatae fuerunt menſe Septembris et Octobris.

 VI. Re-

V. Reliqua phaenomena.

Grando decidit diebus 5; die ſcilicet 28. 31 Martii, die 10. 15 Aprilis et die 1 Maii.

Aurorae boreales obſeruatae fuerunt 37, et quidem 7 lucidae die 7 Febr., die 13 Mart., die 13 Apr., die 16. 25 Nou. et die 3. 9 Decembris: reliquae 30 fulgentes die 19 Ian., die 10. 11. 12. 13. 15. 25 Febr., die 5. 14. 15. 25 Martii; die 8. 9. 14. 17 20 Apr., die 10 Maii, die 8 Aug., die 2. 4. 14. 23. 24. 28. 29 Sept., die 3. 14. 17. 28 Oct., et die 3 Nouembris.

Tonuit 13^{es}: die 12. 15 Maii; die 27. 30 Iunii, die 10. 11. 20. 30 Iulii, die 10. 25 Aug., et vehementius die 28. 29 Iulii et die 4. Auguſti.

Flumen Neua a glacie liberatum fuit die 11 Aprilis, poſtquam per interuallum 135 dierum tantum glacie obductum perſtitit. Deinde poſt 234 dies, hoc eſt die 2 Nouembris iterum glacie obtegebatur.

3 .

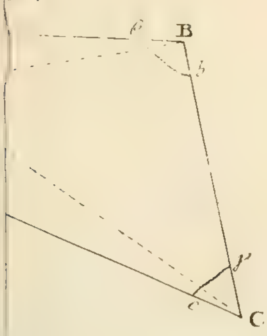
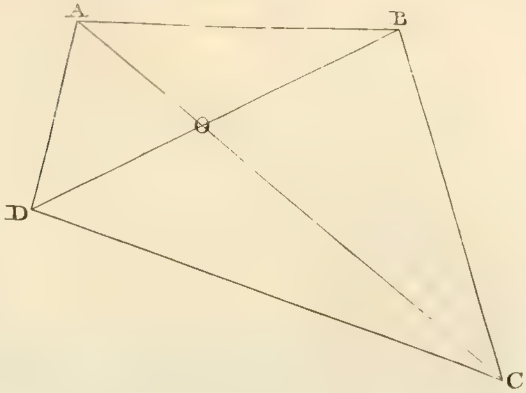


Fig 4 .



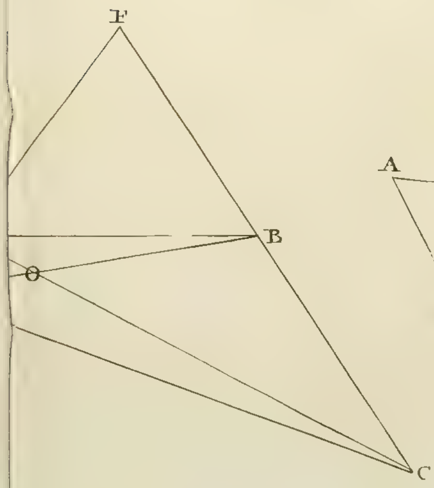


Fig . 6 .

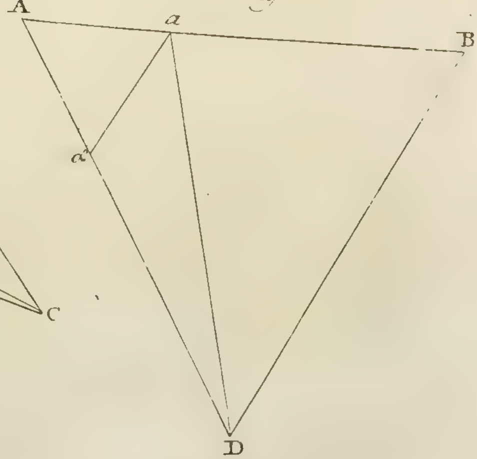
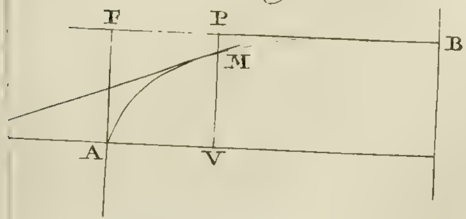


Fig . 7 .



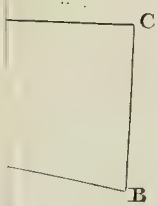


Fig . 2 .

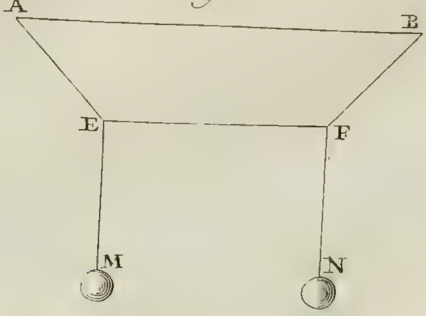


Fig. 3



Fig. 4



Fig. 5

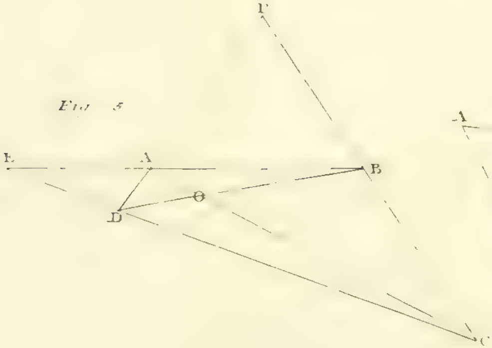


Fig. 6



Fig. 7

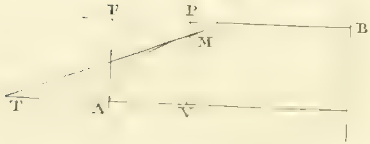


Fig. 1

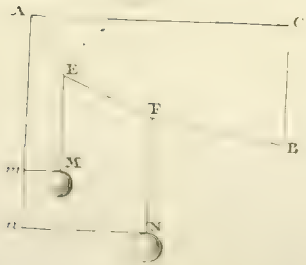
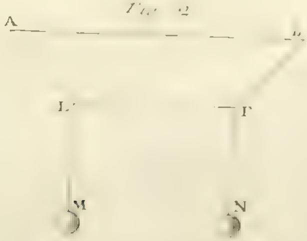


Fig. 2



Acta Acad Imp. Sc. Petropol. Tom. VI. P. II. Tab. 2.

Fig. 2.

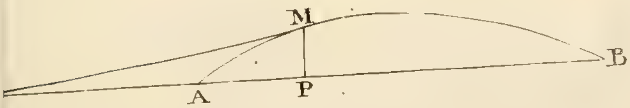


Fig. 4.

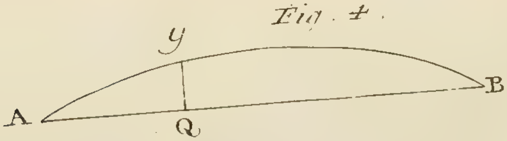
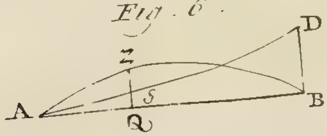
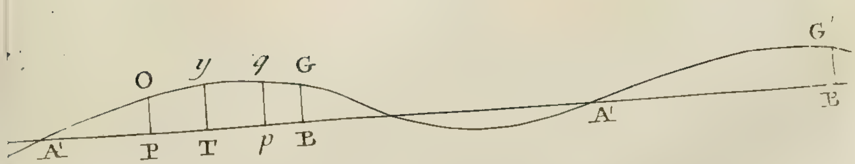


Fig. 6.





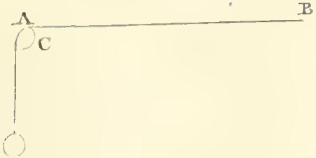


Fig. 1.

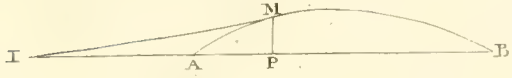


Fig. 2.

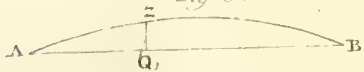


Fig. 3.

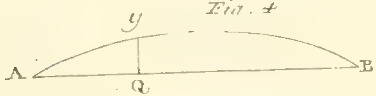


Fig. 4.

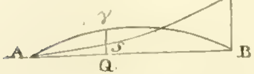


Fig. 5.

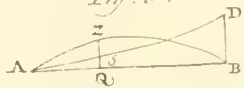


Fig. 6.



Fig. 7.

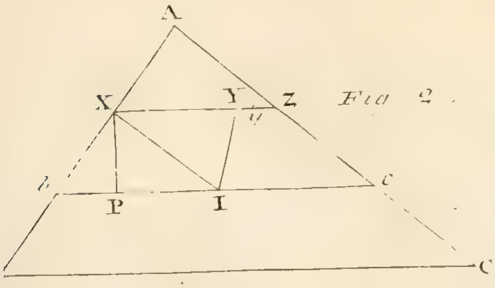


Fig. 2.

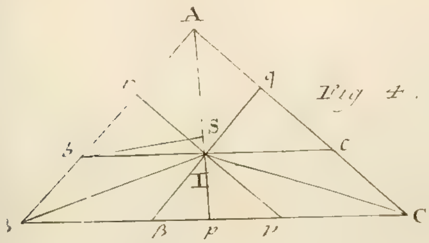


Fig. 4.

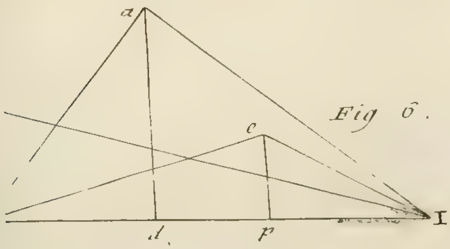


Fig. 6.

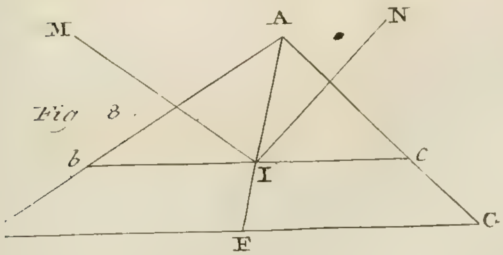


Fig. 8.

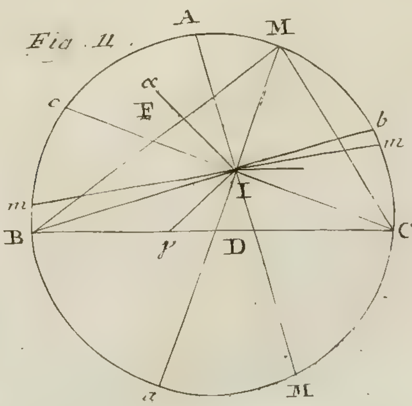


Fig. 11.

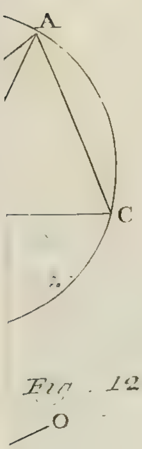


Fig. 12.

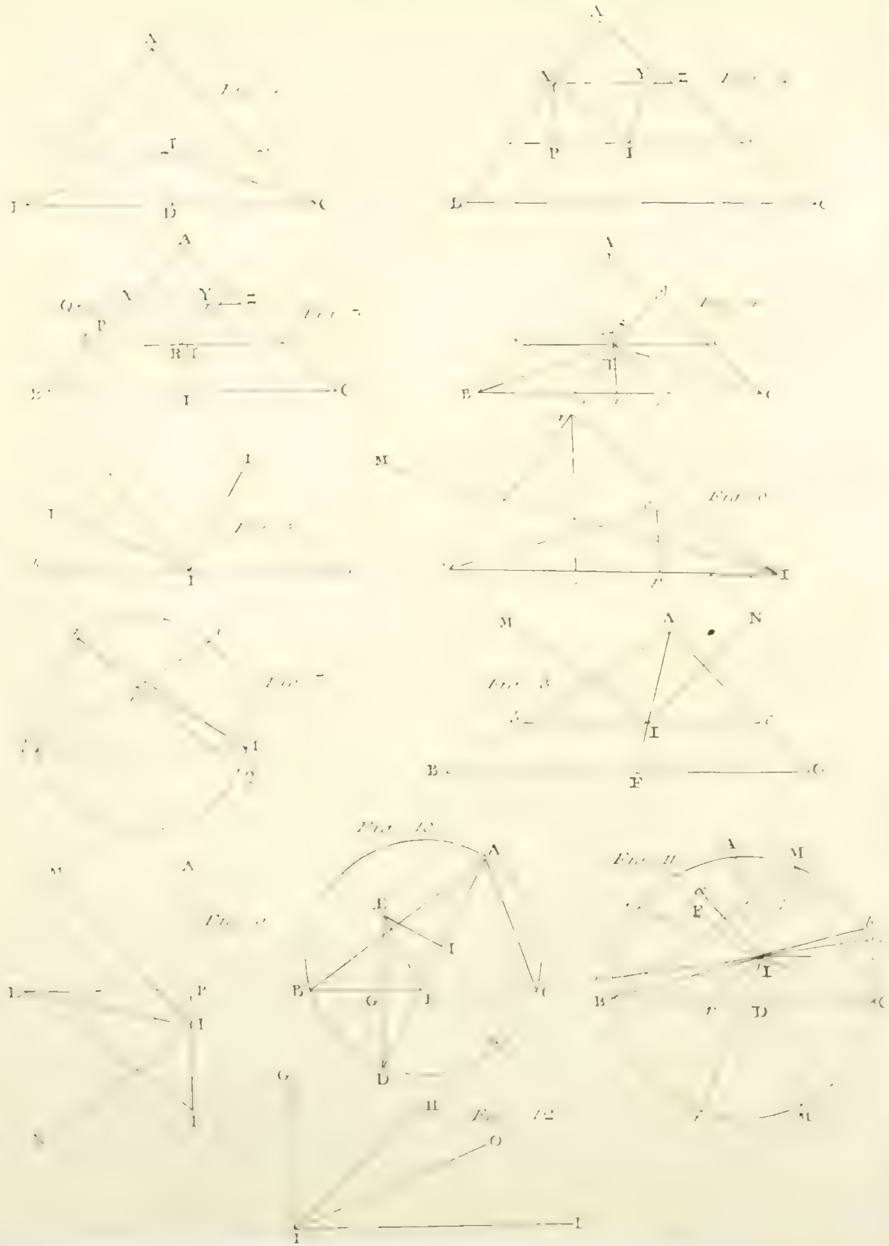
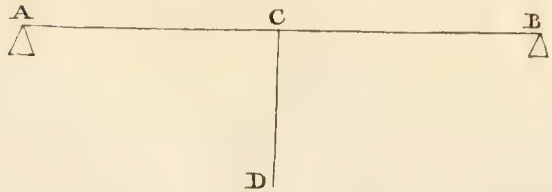


Fig. 2.



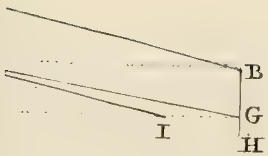


Fig. 4.

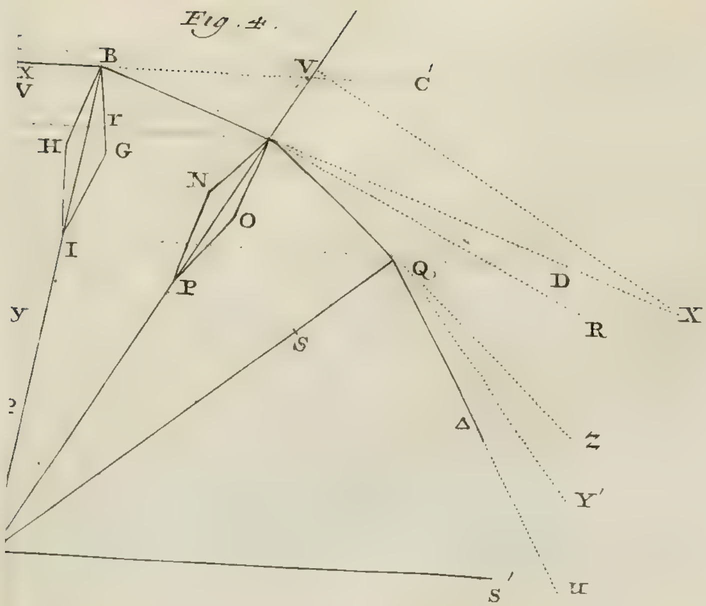


Fig. 1

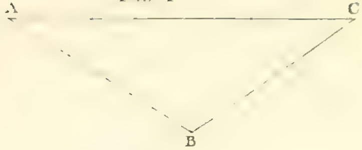


Fig. 2

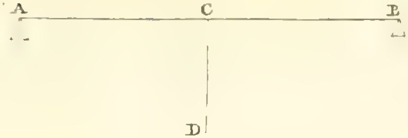


Fig. 3

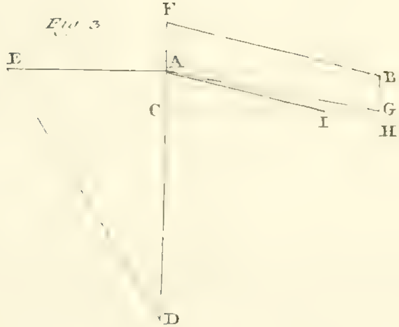
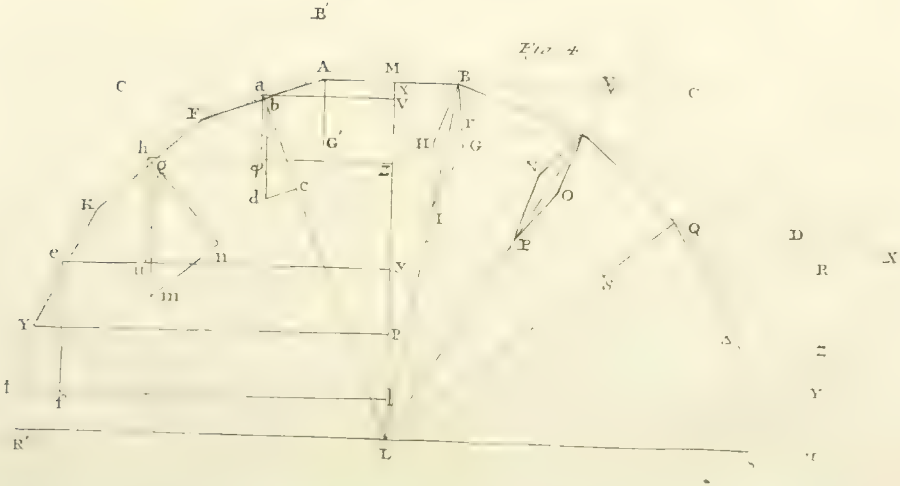


Fig. 4



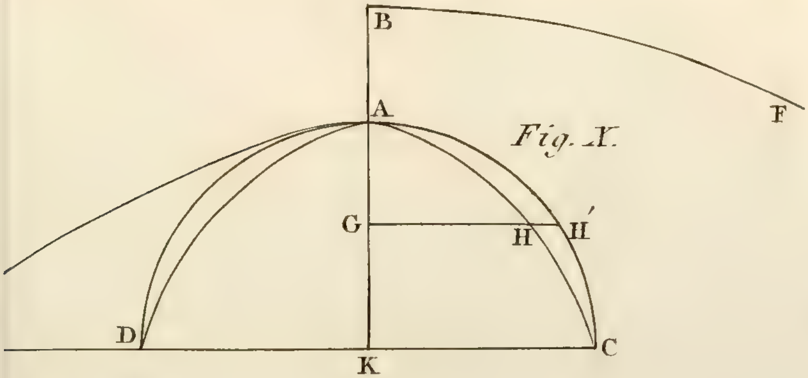
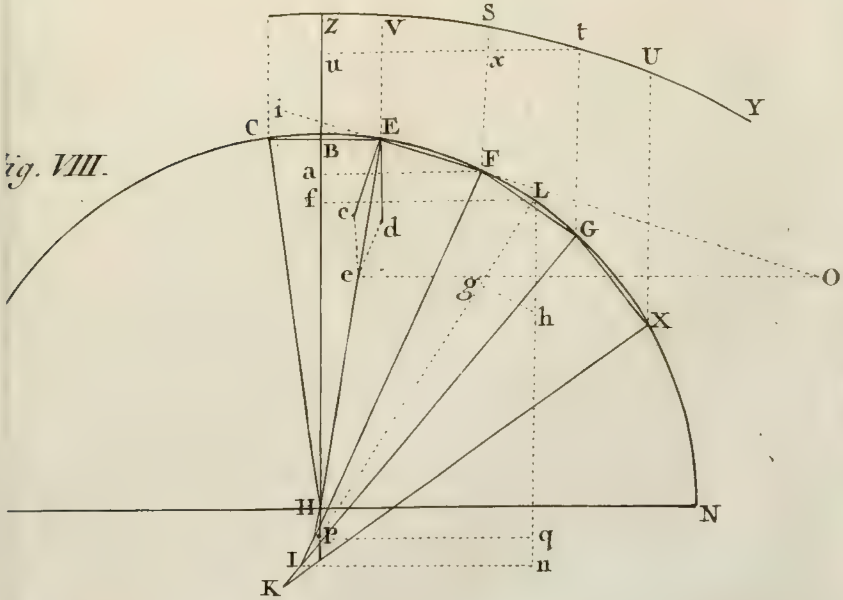


Fig. X.



ig. VIII.

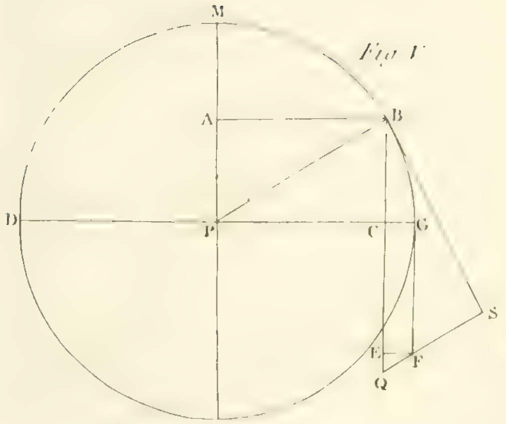


Fig. V.

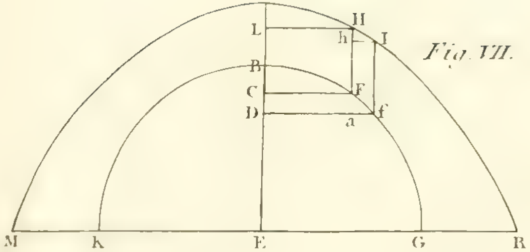


Fig. VII.

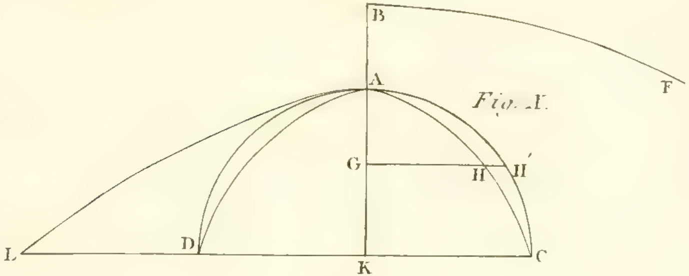


Fig. X.

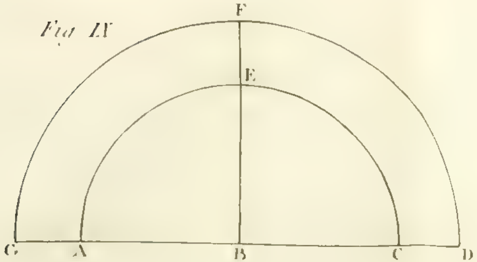


Fig. IV.

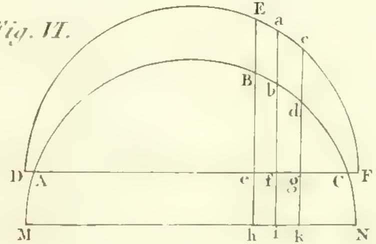


Fig. VI.

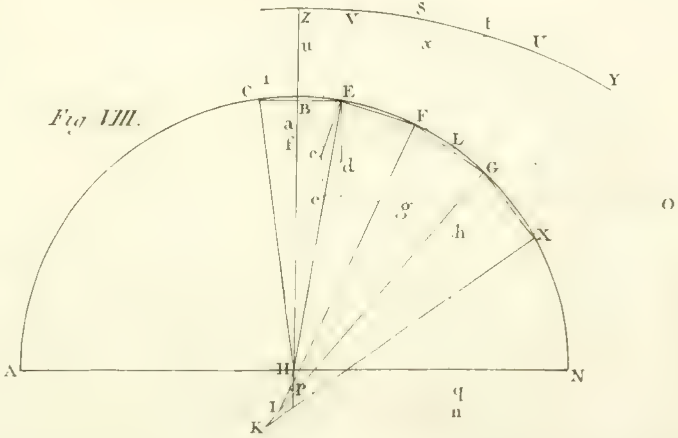


Fig. VIII.

1.



ig. 2.



Fig. 3

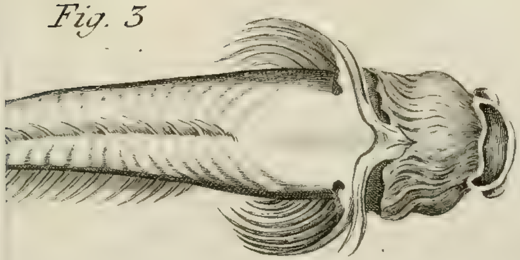


Fig. 4.

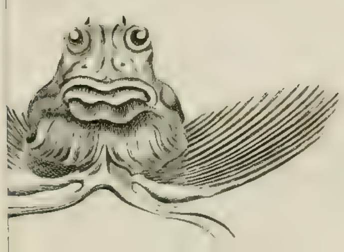


Fig. 1.

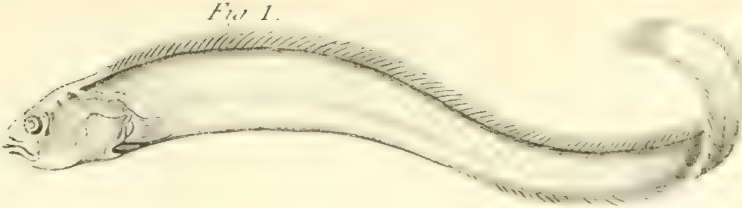


Fig. 2.

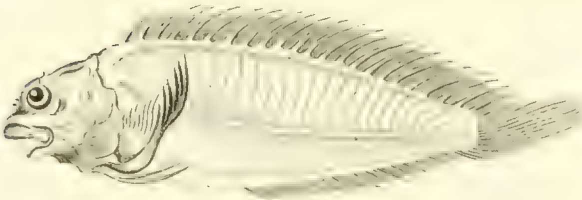


Fig. 3.



Fig. 4.





Sison crinitum



Sison crinitum

Acta Acad. Imp. Sc. Petrop. Tom. III. p. 11. Tab. VIII.





PEUCEDANUM *redivivum*



Fig. 4.

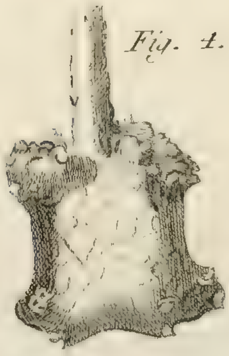
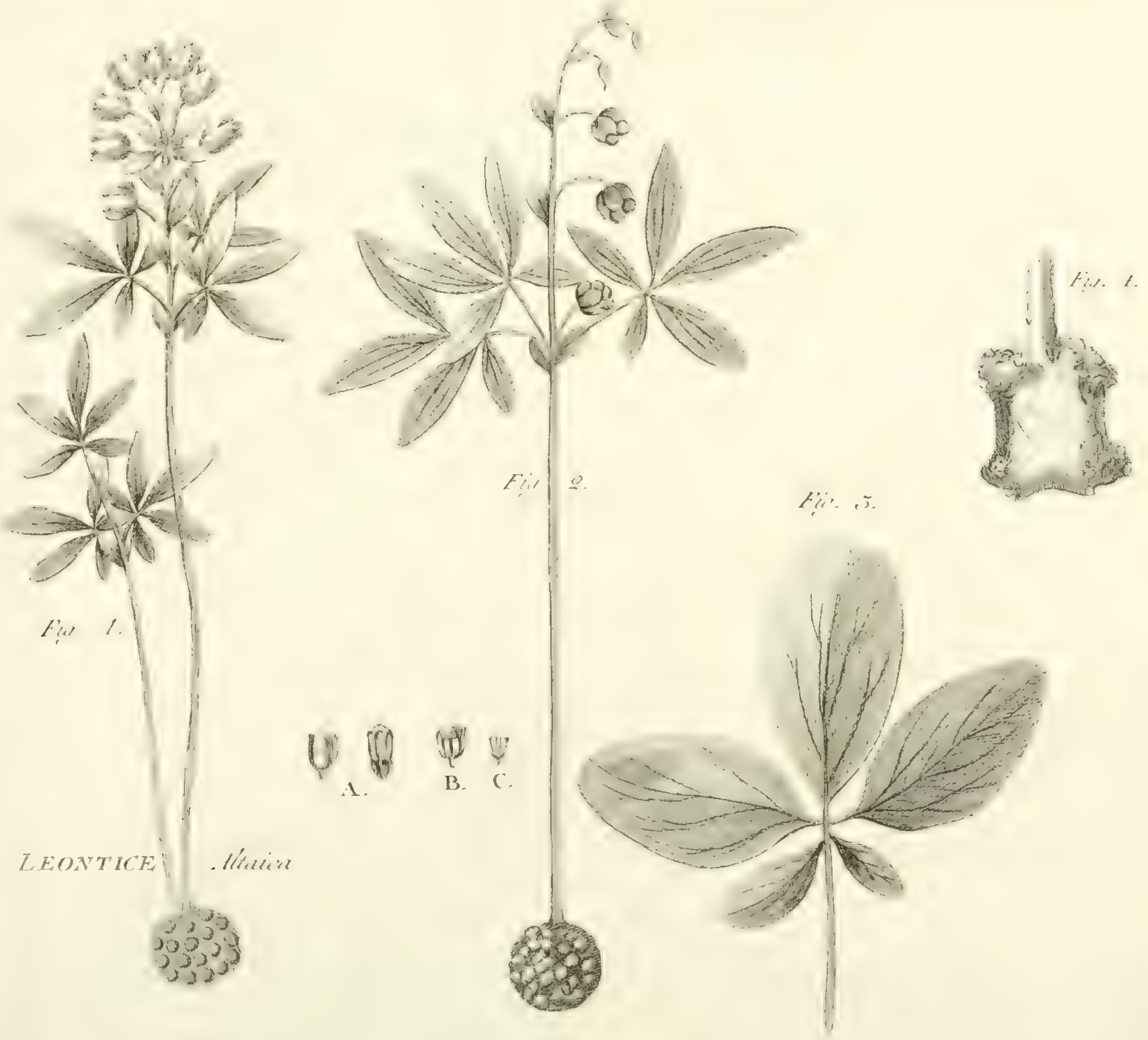


Fig. 5.





LEONTICE Altaica




A.
B.
ASPHODELUS *Altaicus*





AQVILEGIA viridiflora.


annua



NEPETA annua





PHLOMIS *alpina*





Fig. 2.

ini .

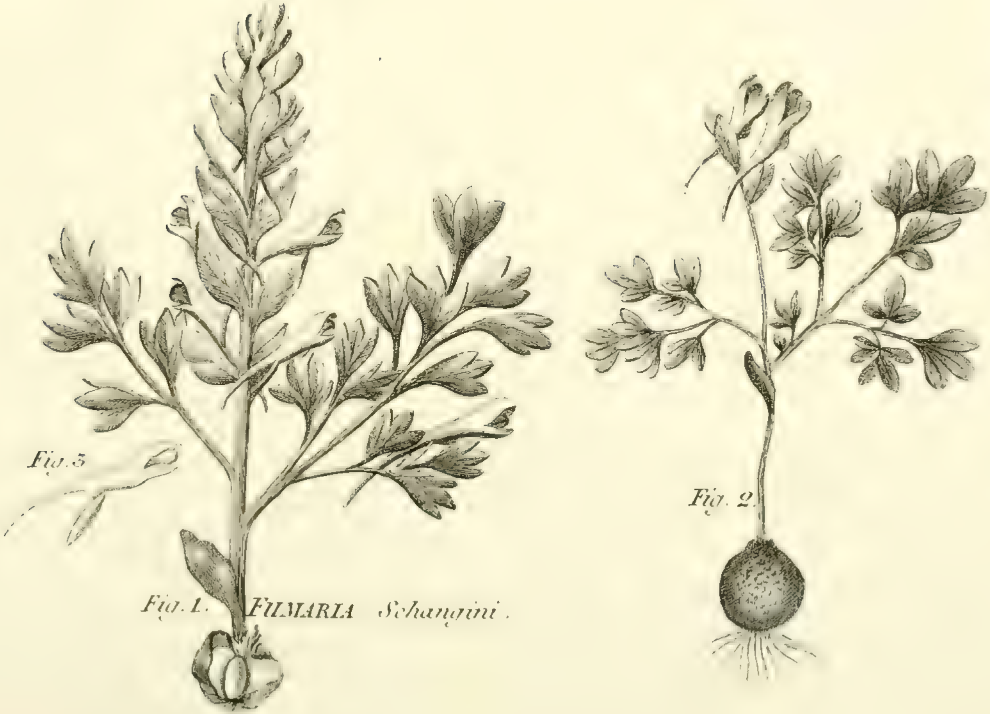


Fig. 3

Fig. 2.

Fig. 1. FUMARIA *Schangini.*





ASTRAGALVS *Deflexus.*



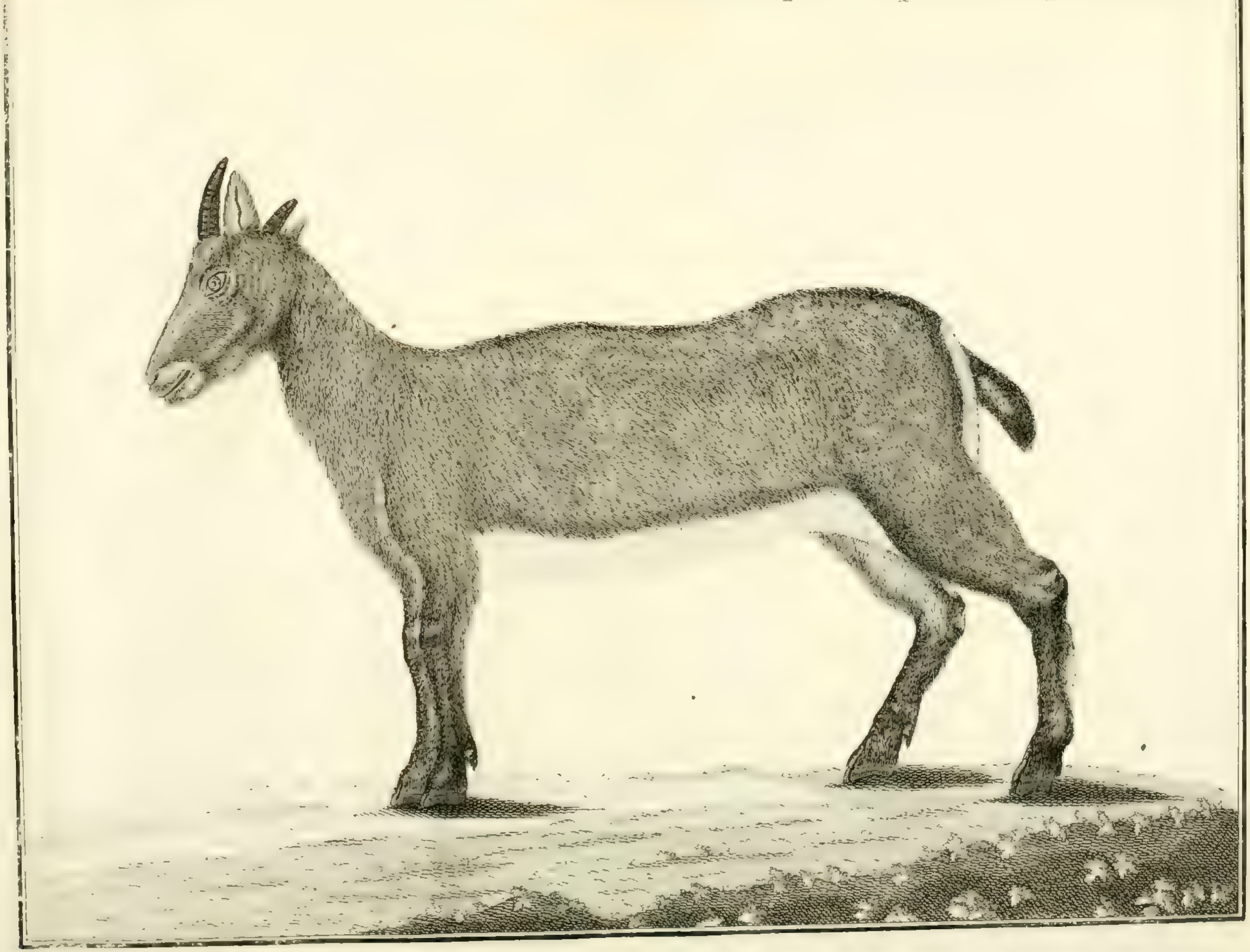
NICVM altaicum.



DORONICVM altaicum.



Acta Acad. Imp. Sc. Petropol. Tom. III. p. 11. Tab. XVII. a.



Imp. Sc. Petropol. Tom. III. P. 2. Tab. XVII. b.



Fig. 1.

Acta Acad Imp Sc Petropol Tom III P 2 Tab XVII b.



Fig 1

Fig 2

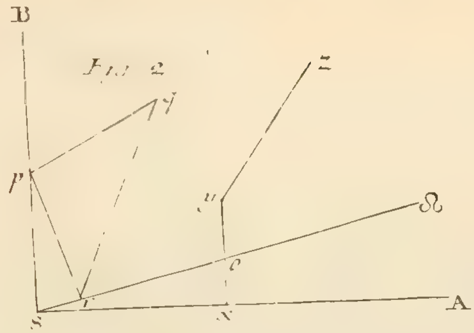


Fig 2

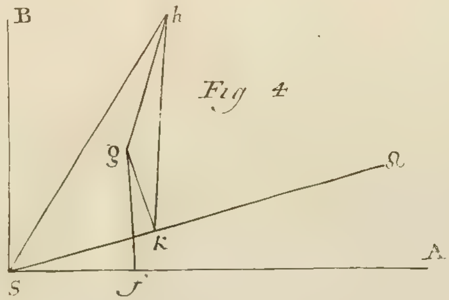


Fig 4

Fig 5.

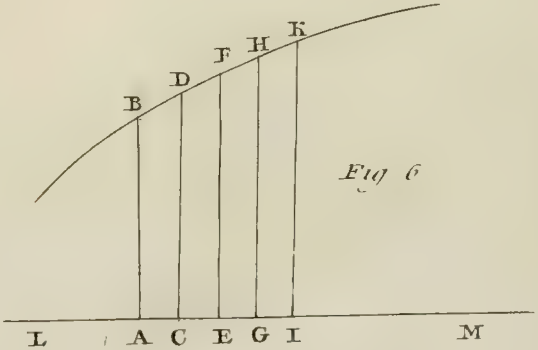
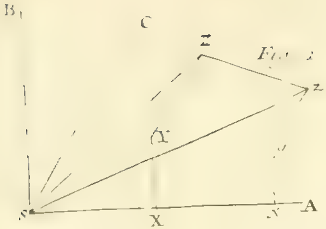
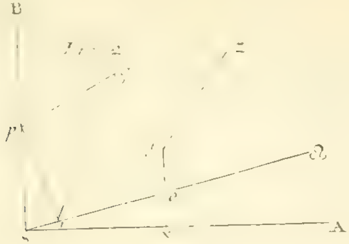
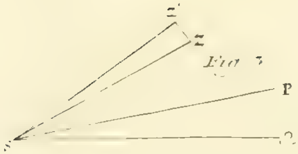
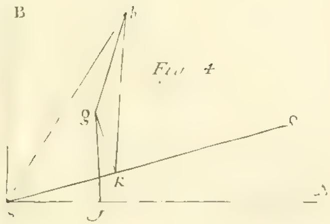


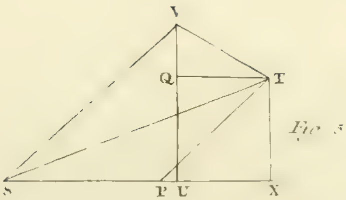
Fig 6

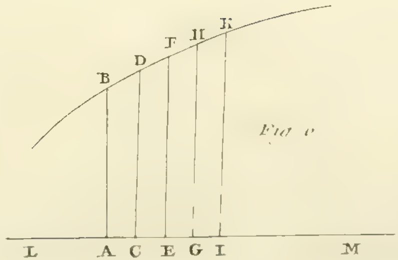

B
C
Z
z
Y
X
A


B
A


Z
z
P


B
g
K
Fig. 4


V
Q
T
S
P
U
X


B
D
F
H
K
L
A
C
E
G
I
M

Act. Acad. Sc. Petropol. 1779 II.

Lettre du comte de Czernischeff sur l'incendie spontanée de ~~chanvre~~ suie et d'huile dans un navire p. 3.

Experiences faites ~~aux~~ Port des Galeres sur cet objet,
dans l'hotel du Comte de Czernischef
a Cronstadt.
a l'amirauté.

Experiences sur l'inflamation spontanée de la suie melée avec differentes huiles par Georgi. p. 19.

Experiences relatives a l'inflamabilité spontanée du chanvre et du lin par Georgi. p. 54.

Description de l'organe de generation du Rhinoceros a deux cornes par Sparrmann. p. 64. t. 1.

Extraits des Rapports envoyés a l'Academie par Georgi.

1.) Teinture en jaune des Calmoucs par une espece de Lichen p. 65.

2.) Remede des Calmoucs contre les maladies de la peau. (Aristolochia clematitis) p. 66

3.) Des Rats d'eau p. 66.

4.) Remede des Calmoucs contre des tumeurs gangreneuses (une espece de Statice nommé Tousokat p. 67.

5.) Remede de ces nomades pour exciter le saignement du nez. (Agrostis pungens p. 68

6.) De la plante appellée Prenanthes chondrilloides p. 68.

Analyse chymique d'une espece de gome-resine, qui se produit autour de la racine du Prenanthes chondrilloides par Georgi. p. 68.

Wolff de vesiculae felleae humanae, ductusque humani cystici et Choledochi superficiebus internis p. 205. t. VI.

Zoujew anatome musculi subcutanei in Erinaceo Europaeo. p. 224 t. VII. f. 1. et 2.

Zoujew descriptio Spari maxillosi p. 229. t. V. ~~fig.~~

dalis petropolotanae
)S3 16-70288
JAN 1 0 1955
nn Library

AMNH LIBRARY
100125053